

数理・データサイエンス・AI のための数学基礎

Excel 演習付き

解答例

目次

第 1 章	順列, 組み合わせ	4
1.1	順列	4
1.2	組み合わせ	5
1.3	Excel による演習	6
第 2 章	集合, ベン図	9
2.1	集合	9
2.2	ベン図	9
2.3	集合の演算	10
2.4	Excel による演習	13
第 3 章	確率	16
3.1	確率の意味	16
3.2	条件付き確率	17
3.3	Excel による演習	19
第 4 章	代表値	20
4.1	平均値	20
4.2	中央値	21
4.3	最頻値	22
4.4	Excel による演習	23
第 5 章	分散, 標準偏差	25
5.1	分散	25
5.2	標準偏差	25
5.3	Excel による演習	26
第 6 章	相関	28
6.1	共分散	28
6.2	相関係数	28
6.3	相関と因果関係	29
6.4	Excel による演習	30
第 7 章	ベクトルの演算	32
7.1	ベクトルと行列	32
7.2	ベクトルの和とスカラー倍	32
7.3	ベクトルの内積	33
7.4	Excel による演習	35
第 8 章	行列の演算	36
8.1	行列の和とスカラー倍	36
8.2	行列の積	37
8.3	Excel による演習	39
第 9 章	多項式関数	41
9.1	多項式関数とは	41

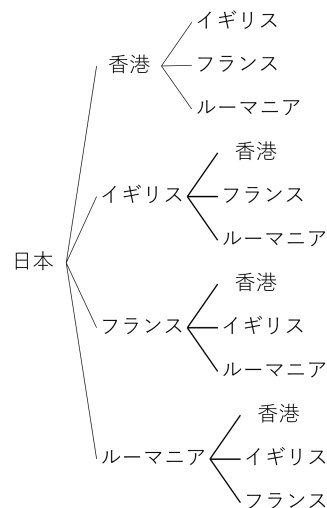
9.2	1 次関数のグラフ	41
9.3	2 次関数のグラフ	44
9.4	Excel による演習	48
第 10 章	指数関数	51
10.1	指数の意味	51
10.2	指数関数のグラフ	53
10.3	Excel による演習	54
第 11 章	対数関数	58
11.1	対数の意味	58
11.2	対数関数のグラフ	59
11.3	Excel による演習	60
第 12 章	微分係数	65
12.1	関数の極限	65
12.2	関数の傾きと微分の関係	65
12.3	Excel による演習	67
第 13 章	1 変数関数の微分法	69
13.1	導関数	69
13.2	関数の増減とグラフ	70
13.3	Excel による演習	72
第 14 章	1 変数関数の積分法	74
14.1	不定積分	74
14.2	積分と面積の関係	75
14.3	定積分	75
14.4	Excel による演習	76
第 15 章	まとめの演習	77

第 1 章 順列，組み合わせ

1.1 順列

- ① 日本，② 香港，③ イギリス，④ フランス，⑤ ルーマニア
(①，②，③，④，⑤は順序がちがってもいい)，
⑥ 香港，⑦ イギリス，⑧ フランス，⑨ ルーマニア (⑥，⑦，⑧，⑨は順序がちがってもいい)，
⑩ イギリス，⑪ フランス，⑫ ルーマニア (⑩，⑪，⑫は順序がちがってもいい)，
⑬ ${}_5P_5$ ，⑭ 1, 3, 4, 5, 6，⑮ 3, 4, 5, 6

問題 1.1



問題 1.2

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360 \quad (6 \text{ から順に } 1 \text{ ずつ減らしながら } 4 \text{ つの整数をかける})$$

より，360 通りあることがわかる．

問題 1.3

- (1) ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$ (5 から順に 1 ずつ減らしながら 2 つの整数をかける)
(2) ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ (7 から順に 1 ずつ減らしながら 3 つの整数をかける)
(3) ${}_6P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ (6 から順に 1 ずつ減らしながら 6 つの整数をかける)
(4) $4! = {}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (4 から順に 1 ずつ減らしながら 4 つの整数をかける)

問題 1.4

$$5! = {}_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

より、120 通りあることがわかる。

問題 1.5

$${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120 \quad (6 \text{ から順に } 1 \text{ ずつ減らしながら } 3 \text{ つの整数をかける})$$

より、120 通りあることがわかる。

問題 1.6

5 の倍数なので、一の位は 5 でなければならない。つまり、一の位の選び方は 1 通りである。

百の位は 1, 2, 3, 4, 6 の 5 通りのどれかである。もし百の位を 1 とすると、十の位は 2, 3, 4, 6 の 4 通りのどれかである。百の位がほかの場合でも、十の位の選び方は 4 通りであることは同様である。

よって、百の位の候補 5 つに対して、十の位の選び方は 4 通りずつあるので、この部分全部で、 5×4 通りあるということになる。

一の位の選び方は 1 通りなので、全体で、 $1 \times 5 \times 4$ 通り、つまり、20 通りあることがわかる。

1.2 組み合わせ

⑩ 10, ⑪ 10,

⑫ 化学, 生物 (または, 生物, 化学), ⑬ 化学, 地学 (または, 化学, 地学),

⑭ 生物, 地学 (または, 地学, 生物) (⑫, ⑬, ⑭は順序がちがってもいい),

⑮ 2, ⑯ 3, ⑰ 3

問題 1.7

(日本, 香港, イギリス), (日本, イギリス, 香港),

(香港, 日本, イギリス), (香港, イギリス, 日本),

(イギリス, 日本, 香港), (イギリス, 香港, 日本)

問題 1.8

{日本, 香港, イギリス}, {日本, 香港, フランス}, {日本, 香港, ルーマニア},

{日本, イギリス, フランス}, {日本, イギリス, ルーマニア}, {日本, フランス, ルーマニア},

{香港, イギリス, フランス}, {香港, イギリス, ルーマニア}, {香港, フランス, ルーマニア},

{イギリス, フランス, ルーマニア}

問題 1.9

相異なる 4 つのものから 2 つ選んだものの総数を求めればいい。つまり、

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

より、6 通りであることがわかる。6 通りの組み合わせを全部書き出すと、下記のようなになる。

{数学, 物理}, {数学, 化学}, {数学, 生物},

{物理, 化学}, {物理, 生物},
{化学, 生物}

問題 1.10

$$(1) {}_6C_4 = \frac{{}_6P_4}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$$

$$(2) {}_6C_2 = \frac{{}_6P_2}{2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$$(3) {}_7C_6 = \frac{{}_7P_6}{6!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7$$

$$(4) {}_7C_1 = \frac{{}_7P_1}{1!} = \frac{7}{1} = 7$$

問題 1.11

a^3b の係数は

$${}_4C_1 = \frac{{}_4P_1}{1!} = \frac{4}{1} = 4$$

より, 4 となることがわかる.

問題 1.12

a^2b^2 の係数は

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

より, 6 となることがわかる.

問題 1.13

$$(a+b)^4 = {}_4C_0 a^4 + {}_4C_1 a^3b + {}_4C_2 a^2b^2 + {}_4C_3 ab^3 + {}_4C_4 b^4$$

とあらわすことができる. ここで,

$${}_4C_0 = {}_4C_4 = 1, \quad {}_4C_1 = {}_4C_3 = 4, \quad {}_4C_2 = 6$$

なので,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

となることがわかる.

1.3 Excel による演習

問題 1.14

PERMUT 関数を使って, ${}_9P_6$ を求める.

入力モードを「半角英数字」にし, あるセルに「=p」などと入力すると, 予測変換で関数の候補の一覧が出てくる.

そこから「PERMUT」をダブルクリックし選択する。すると、「=PURMUT(」と入力されるので、続けて、「9,6」と入力する。

Enter キーを押すと ${}_9P_6$ の値 60480 が計算される。セルには「=PERMUT(9,6)」と入力される。

問題 1.15

まず、次のように入力する。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	m個の数字 1, 2, 3, ..., m のなかから3つの数字を選んでできる3けたの整数は何通りあるか							
2								
3	数字の個数m	けた数	何通りか					
4		3	3					
5		4	3					
6		5	3					
7		6	3					
8		7	3					
9		8	3					
10		9	3					
11								
12								

つぎに、セル C4 に「=PERMUT(」と入力し、セル A4 をクリックして指定する。続けて、「,」を入力し、セル B4 をクリックして指定する。

Enter キーを押すと ${}_3P_3$ の値 6 が計算される。セルには「=PERMUT(A4,B4)」と入力される。このセルをふたたび選択し、セルの右下あたりにマウスポインタを合わせると、マウスポインタが「+」の形になる。この状態のままセル C10 まで下にドラッグし、オートフィルする。

C4	=PERMUT(A4,B4)							
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	m個の数字 1, 2, 3, ..., m のなかから3つの数字を選んでできる3けたの整数は何通りあるか							
2								
3	数字の個数m	けた数	何通りか					
4		3	3	6				
5		4	3	24				
6		5	3	60				
7		6	3	120				
8		7	3	210				
9		8	3	336				
10		9	3	504				
11								
12								

すると、 ${}_3P_3$ から ${}_9P_3$ までの値も PERMUT 関数で求められる。

問題 1.16

まず、次のように入力する。

	A	B	C	D
1	n	k	nC_k	
2	10	0		
3	10	1		
4	10	2		
5	10	3		
6	10	4		
7	10	5		
8	10	6		
9	10	7		
10	10	8		
11	10	9		
12	10	10		
13				
14				

つぎに、セル C2 に「=COMBIN(」と入力し、セル A2 をクリックして指定する。続けて、「,」を入力し、セル B2 をクリックして指定する。

Enter キーを押すと ${}_{10}C_0$ の値 1 が計算される。セルには「=COMBIN(A2,B2)」と入力される。このセルをふたたび選択し、セルの右下あたりにマウスポインタを合わせると、マウスポインタが「+」の形になる。この状態のままセル C12 まで下にドラッグし、オートフィルする。

	A	B	C	D
1	n	k	nC_k	
2	10	0	1	
3	10	1	10	
4	10	2	45	
5	10	3	120	
6	10	4	210	
7	10	5	252	
8	10	6	210	
9	10	7	120	
10	10	8	45	
11	10	9	10	
12	10	10	1	
13				
14				

すると、 ${}_{10}C_0$ から ${}_{10}C_{10}$ までの値も COMBIN 関数で求められる。

第2章 集合，ベン図

2.1 集合

① \in , ② \notin , ③ \in

問題 2.1

$\{3, 6, 9\}$,

$\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$,

$\{\text{お, も, し, ろ, く, な, い}\}$

問題 2.2

$\{3\} \subset \{3, 6, 9\}$,

$\{H, E, L, L, O\} \subset \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$,

$\{\text{お, も, し, ろ, い}\} \subset \{\text{お, も, し, ろ, く, な, い}\}$

問題 2.3

(1) $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

(2) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(3) $C = \{3, -3\}$

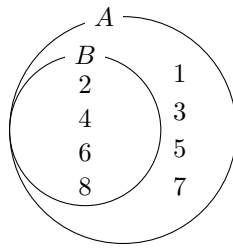
(4) $D = \{\text{高知, 香川, 愛媛, 徳島}\}$

(5) $E = \{2, 3, 5, 7\}$

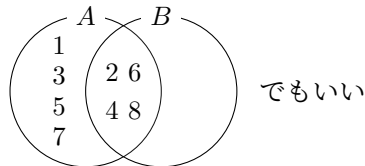
2.2 ベン図

問題 2.4

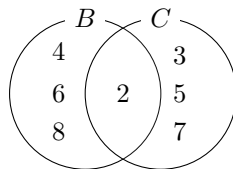
それぞれのベン図は次のようになる。



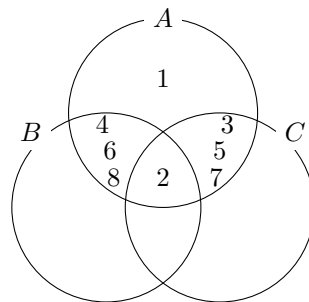
集合 A, B をあらわすベン図



集合 A, B をあらわすベン図



集合 B, C をあらわすベン図



集合 A, B, C をあらわすベン図

2.3 集合の演算

- ④ $\{2, 4, 6, 8, 12, 18\}$, ⑤ $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18\}$, ⑥ $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18\}$, ⑦ $\{6\}$, ⑧ $\{6\}$, ⑨ $\{6\}$,
 ⑩ $\{\text{あ, き, ひ, め, ま}\}$, ⑪ $\{\text{あ, き, ひ, め, ま}\}$, ⑫ $\{\text{あ, ひ, め}\}$, ⑬ $\{\text{ひ, め, あ}\}$, ⑭ $\{12, 18\}$, ⑮ $\{3, 9, 15\}$,
 ⑯ $\{7, 8, 9, 10\}$, ⑰ $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, ⑱ 7, ⑲ $(10 - 7 =) 3$, ⑳ $(5 + 7 - 4 =) 8$, ㉑ $(10 - 4 =) 6$,
 ㉒ $(10 - 8 =) 2$, ㉓ 20, ㉔ 180, ㉕ 100, ㉖ B

問題 2.5

- (1) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
 (2) $A \cap C = \{1, 3\}$
 (3) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$(4) A \cap B \cap C = \{1\}$$

$$(5) A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 5\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(6) (A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 4, 7, 8\} = \{1, 3, 4\}$$

$$(7) A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3\}$$

$$(8) (A \cap B) \cup C = \{1, 2\} \cup \{1, 3, 4, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$

問題 2.6

集合 A, B, C を下記のようにする.

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\},$$

$$B = \{0, 3, 6, 9\},$$

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

このとき,

$$A \cup (B \cap C) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{0, 3\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 10\},$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$$

また,

$$A \cap (B \cup C) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\} = \{0, 2, 4, 6\},$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0, 6\} \cup \{0, 2, 4\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

となることがわかり, 分配法則

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

が成り立つことが確認できる.

問題 2.7

$$(1) A - B = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$(2) B - A = \emptyset$$

$$(3) B - C = \{4, 6, 8\}$$

$$(4) C - B = \{3, 5, 7\}$$

$$(5) A - C = \{1, 4, 6, 8\}$$

$$(6) C - A = \emptyset$$

問題 2.8

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}} = \{9, 10\}, \quad \overline{A \cap B \cap C} = \overline{\{1\}} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

また,

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{3, 5, 7, 8, 9, 10\} \cap \{2, 5, 6, 9, 10\} = \{9, 10\},$$

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{3, 5, 7, 8, 9, 10\} \cup \{2, 5, 6, 9, 10\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

となることがわかり,

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \quad \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

が成り立つことが確認できる.

問題 2.9

全体集合 U を

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

とし, 集合 A, B を下記のようにする.

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{0, 3, 6, 9\}$$

このとき,

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}} = \{1, 5, 7\}, \quad \overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 5, 7\}$$

また,

$$\overline{A \cap B} = \overline{\{0, 6\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\},$$

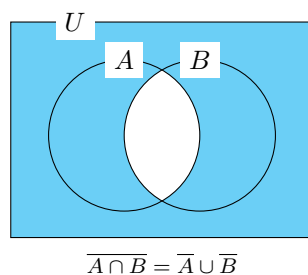
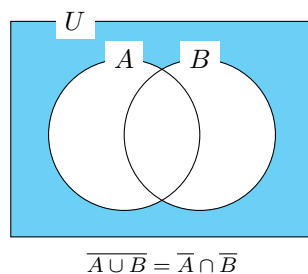
$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

となることがわかり, ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

が成り立つことが確認できる.

問題 2.10

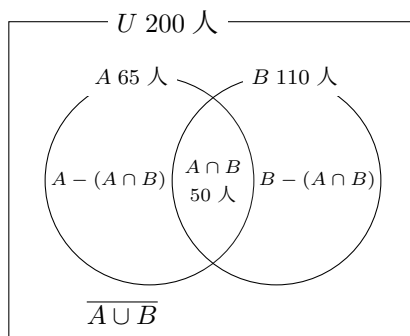


問題 2.11

全体集合 U を対象の 200 人の学生からなる集合, 集合 A を数学入門を修得した学生からなる集合, 集合 B を統計学入門を修得した学生からなる集合とする. このとき,

$$|U| = 200, \quad |A| = 65, \quad |B| = 110, \quad |A \cap B| = 50$$

ということになる.



よって, 次のことがわかる.

- (1) 少なくともどちらかを修得した人数は

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 65 + 110 - 50 = 125$$

- (2) どちらも修得しなかった人数は

$$|\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B| = 200 - 125 = 75$$

- (3) 数学入門のみ修得した人数は

$$|A - (A \cap B)| = |A| - |A \cap B| = 65 - 50 = 15$$

- (4) 統計学入門のみ修得した人数は

$$|B - (A \cap B)| = |B| - |A \cap B| = 110 - 50 = 60$$

2.4 Excel による演習

問題 2.12

セル J2 に, 「=AND(B2=TRUE,C2=FALSE)」と入力する. すると, 「セル B2 が TRUE, **かつ**, セル C2 が FALSE」であるかどうか判定される (判定が真なら「TRUE」、偽なら「FALSE」が返される).

セル K2 には, 「=AND(B2=FALSE,C2=TRUE)」と入力する. すると, 「セル B2 が FALSE, **かつ**, セル C2 が TRUE」であるかどうか判定される (判定が真なら「TRUE」、偽なら「FALSE」が返される).

セル範囲 J2:K2 を 12 行目まで下にドラッグし, オートフィルする.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		陸	空	陸かつ空	陸または空	「陸かつ空」でない	「陸でない」または「空でない」	「陸または空」でない	「陸でない」かつ「空でない」	陸のみ	空のみ
2	乗用車	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
3	飛行機	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
4	車輪方式ヘリコプター	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
5	スキッド方式ヘリコプター	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE
6	水陸両用戦車	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
7	電車	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
8	船	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
9	気球	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE
10	ロケット	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE
11	ボート	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
12	水陸両用ブルドーザー	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
13											
14											

問題 2.13

セル B14 に「=COUNTIF(B2:B12,TRUE)」と入力し、これを K 列まで右にオートフィルする。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		陸	空	陸かつ空	陸または空	「陸かつ空」でない	「陸でない」または「空でない」	「陸または空」でない	「陸でない」かつ「空でない」	陸のみ	空のみ
2	乗用車	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
3	飛行機	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
4	車輪方式ヘリコプター	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE
5	スキッド方式ヘリコプター	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE
6	水陸両用戦車	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
7	電車	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
8	船	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
9	気球	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE
10	ロケット	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE
11	ボート	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
12	水陸両用ブルドーザー	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE
13											
14	TRUEの個数	6	5	2	9	9	9	2	2	4	3
15											
16											

これより、次がわかる。

$$|A| = 6 \text{ (セル B14)}, \quad |B| = 5 \text{ (セル C14)}, \quad |A \cap B| = 2 \text{ (セル D14)}, \quad |A \cup B| = 9 \text{ (セル E14)},$$

$$|A - (A \cap B)| = 4 \text{ (セル J14)}, \quad |B - (A \cap B)| = 3 \text{ (セル K14)}$$

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
 (「陸または空の個数」=「陸の個数」+「空の個数」-「陸かつ空の個数」)について

$$\text{左辺} = |A \cup B| = 9,$$

$$\text{右辺} = |A| + |B| - |A \cap B| = 6 + 5 - 2 = 9$$

となり、成り立つことが確認できる。

- $|A| = |A \cap B| + |A - (A \cap B)|$
 (「陸の個数」=「陸かつ空の個数」+「陸のみの個数」)について

$$\text{左辺} = |A| = 6,$$

$$\text{右辺} = |A \cap B| + |A - (A \cap B)| = 2 + 4 = 6$$

となり、成り立つことが確認できる。

- $|B| = |A \cap B| + |B - (A \cap B)|$
 (「空の個数」=「陸かつ空の個数」+「空のみの個数」)について

$$\text{左辺} = |B| = 5,$$

$$\text{右辺} = |A \cap B| + |B - (A \cap B)| = 2 + 3 = 5$$

となり，成り立つことが確認できる．

問題 2.14

セル範囲 C1:C12 を書き換える．そして，1 行目にある「空」という文字を「海」という文字に変更すればいい．

第3章 確率

3.1 確率の意味

① 6, ② 1, ③ $\frac{1}{6}$, ④ 6, ⑤ 2, ⑥ 5, ⑦ 1, ⑧ (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)

問題 3.1

出る目についてのすべての場合は {1, 2, 3, 4, 5, 6} なので 6 通りあり, 素数の目が出る場合は {2, 3, 5} なので 3 通りある. よって, 求める確率は $(3/6 =) 1/2$ であることがわかる.

[別解] 加法定理より

「2 の目が出る確率 $(1/6)$ 」+「3 の目が出る確率 $(1/6)$ 」+「5 の目が出る確率 $(1/6)$ 」

を計算して, 「素数の目が出る確率 $(1/2)$ 」を求めてもいい. 2 の目が出ることと 3 の目が出ることと 5 の目が出るものが互いに排反であるからである.

問題 3.2

さいころを振ったときに「素数以外の目が出ること」は「素数の目が出ること」の余事象なので,

「素数以外の目が出る確率」= $1 -$ 「素数の目が出る確率 $(1/2)$ 」

と計算して求めることができる. よって, 求める「素数以外の目が出る確率」は $1/2$ である.

問題 3.3

すべての場合は

{(あたり1, あたり1), (あたり1, あたり2), (あたり1, はずれ1), (あたり1, はずれ2), (あたり1, はずれ3),
(あたり1, はずれ4), (あたり1, はずれ5), (あたり1, はずれ6), (あたり1, はずれ7), (あたり1, はずれ8),
⋮
(はずれ8, あたり1), (はずれ8, あたり2), (はずれ8, はずれ1), (はずれ8, はずれ2), (はずれ8, はずれ3),
((はずれ8, はずれ4), (はずれ8, はずれ5), (はずれ8, はずれ6), (はずれ8, はずれ7), (はずれ8, はずれ8))}

なので, 10×10 より 100 通りある. 最初の人でも次の人もあたりくじを引く場合は

{(あたり1, あたり1), (あたり1, あたり2), (あたり2, あたり1), (あたり2, あたり2)}

なので, 4 通りある. よって, 求める確率は $(4/100 =) 1/25$ であることがわかる.

[別解] 「最初の人があたりくじを引くこと」と「次の人があたりくじを引くこと」が互いにその結果に影響を及ぼさない, つまり, 独立なので, 最初の人があたりくじを引く確率 $2/10$ と, 次の人があたりくじを引く確率 $2/10$ をかけあわせても求めることができる. つまり,

$$\frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{25}$$

と計算して求めることもできる.

3.2 条件付き確率

⑨ $\frac{1}{2}$, ⑩ 1, ⑪ 8, ⑫ 2, ⑬ 700, ⑭ 9999

問題 3.4

奇数の目が出たことは確定しているので, $\{1, 3, 5\}$ の 3 通りのなかでの 3 以上の目が出る割合を考えればいい. このなかで 3 以上の目が出る場合は $\{3, 5\}$ の 2 通りだけなので, 求める確率は $2/3$ であることがわかる.

問題 3.5

1 以外の目が出たことは確定しているので, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ の 5 通りのなかでの 2 の目が出る割合を考えればいい. 2 の目が出る場合は $\{2\}$ の 1 通りだけなので, 求める確率は $1/5$ であることがわかる.

問題 3.6

事象 A を「最初の人はずれくじを引くこと」とし, 事象 B を「次の人はずれくじを引くこと」とする.

最初の人はずれくじを引く確率は $8/10$ である. これが, 「 A が起こる確率」である. そして, 最初の人はずれくじを引いたとき, 袋のなかにはあたりくじが 2 個とはずれくじが 7 個残っているので, 次の人がそこからはずれくじを引く確率は $7/9$ である. これが, 「 A のもとで B が起こる条件付き確率」である.

これらを式にあてはめると, A かつ B が起こる確率は

$$A \text{ が起こる確率} \times A \text{ のもとで } B \text{ が起こる条件付き確率} = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

となる.

問題 3.7

まず, 「最初の人があたりくじを引く, かつ, 次の人はずれくじを引く確率」を求める.

事象 A を「最初の人があたりくじを引くこと」とし, 事象 B を「次の人はずれくじを引くこと」とする.

最初の人があたりくじを引く確率は $2/10$ である. これが, 「 A が起こる確率」である. そして, 最初の人があたりくじを引いたとき, 袋のなかにはあたりくじが 1 個とはずれくじが 8 個残っているので, 次の人がそこからはずれくじを引く確率は $8/9$ である. これが, 「 A のもとで B が起こる条件付き確率」である.

これらを式にあてはめると, A かつ B が起こる確率は

$$A \text{ が起こる確率} \times A \text{ のもとで } B \text{ が起こる条件付き確率} = \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{45}$$

となる.

つぎに, 「最初の人はずれくじを引く, かつ, 次の人あたりくじを引く確率」を求める.

事象 A を「最初の人はずれくじを引くこと」とし, 事象 B を「次の人あたりくじを引くこと」とする.

最初の人はずれくじを引く確率は $8/10$ である. これが, 「 A が起こる確率」である. そして, 最初の人はずれくじを引いたとき, 袋のなかにはあたりくじが 2 個とはずれくじが 7 個残っているので, 次の人がそこからあたりくじを引く確率は $2/9$ である. これが, 「 A のもとで B が起こる条件付き確率」である.

これらを式にあてはめると, A かつ B が起こる確率は

$$A \text{ が起こる確率} \times A \text{ のもとで } B \text{ が起こる条件付き確率} = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

となる.

以上より,「最初の人があたりくじを引き,かつ,次の人ははずれくじを引く確率」と「最初の人はずれくじを引き,かつ,次の人はあたりくじを引く確率」はどちらも $8/45$ となることがわかる.

問題 3.8

最初の人があたりくじを引く確率は $2/10$, つまり, $1/5$ であるとなすぐにわかる (なお, この値 $1/5$ は, 「最初の人があたりくじを引き, かつ, 次の人もあたりくじを引く確率」と「最初の人があたりくじを引き, かつ, 次の人ははずれくじを引く確率」をたした値と一致する. つまり,

$$\frac{1}{45} + \frac{8}{45}$$

と一致する (それぞれの確率は例題 3.8, 問題 3.7 参照)).

一方, 次の人があたりくじを引く確率は, 「最初の人があたりくじを引き, かつ, 次の人もあたりくじを引く確率」と「最初の人はずれくじを引き, かつ, 次の人はあたりくじを引く確率」をたして求めることができる. よって,

$$\frac{1}{45} + \frac{8}{45}$$

を計算して, $1/5$ になることがわかる (それぞれの確率は例題 3.8, 問題 3.7 参照).

以上より, 最初の人があたりくじを引く確率と次の人があたりくじを引く確率は互いに等しいことがわかる. すなわち, 最初にくじを引くのと次にくじを引くのでは, あたりやすさは同じというように考えられる.

問題 3.9

条件付き確率を求める式:

$$A \text{ のもとで } B \text{ が起こる条件付き確率} \left(= \frac{A \text{ かつ } B \text{ が起こる確率}}{A \text{ の起こる確率}} \right) = \frac{B \text{ かつ } A \text{ が起こる確率}}{A \text{ の起こる確率}}$$

を使って求める. 事象 A を「陽性であること」とし, 事象 B を「感染者であること」とすればいい. 式にあてはめると,

$$\text{陽性であるとき感染者である確率} = \frac{\text{感染者かつ陽性である確率}}{\text{陽性である確率}}$$

$$= \frac{\text{感染者かつ陽性である確率}}{\text{感染者かつ陽性である確率} + \text{非感染者かつ陽性である確率}}$$

(乗法定理より下になる ↓)

$$= \frac{\text{感染者である確率} \times \text{感染者であるとき陽性である確率}}{\text{感染者である確率} \times \text{感染者であるとき陽性である確率} + \text{非感染者である確率} \times \text{感染者であるとき陽性である確率}}$$

$$= \frac{\frac{20}{100} \times \frac{70}{100}}{\frac{20}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{80}{100} \times \frac{0.1}{100}} = \frac{175}{176}$$

となる. よって, 検査が陽性と判断された者が感染者である確率は $175/176$ となることがわかる.

3.3 Excel による演習

問題 3.10

セル D5 に計算した 3 の倍数の目が出る割合

$$\frac{\text{3 の倍数の目が出る回数}}{\text{さいころを振る回数}}$$

が、さいころを振ったときの 3 の倍数の目が出る確率 $1/3 (= 0.333\cdots)$ に近い値になることが確認できる。

	A	B	C	D	E
1	試行		1の目が出る回数	1の目が出る割合	
2		3	177	0.177	
3		3			
4		6	3の倍数の目が出る回数	3の倍数の目が出る割合	
5		3	333	0.333	
6		1			
7		2			
8		6			

問題 3.11

A 列にある素数が表示されているセルの個数を求める計算式

「=COUNTIF(A:A,2)+COUNTIF(A:A,3)+COUNTIF(A:A,5)」をセル C8 に入力する。そして、素数の目が出る割合

$$\frac{\text{素数の目が出る回数}}{\text{さいころを振る回数}}$$

を求める計算式「=C8/1000」をセル D8 に入力する。

	A	B	C	D	E
1	試行		1の目が出る回数	1の目が出る割合	
2		1	176	0.176	
3		6			
4		3	3の倍数の目が出る回数	3の倍数の目が出る割合	
5		1	321	0.321	
6		2			
7		2	素数の目が出る回数	素数の目が出る割合	
8		4	500	0.5	
9		5			
10		5			
11		6			

この結果が、さいころを振ったときの素数の目が出る確率 $1/2 (= 0.5)$ に近い値になることが確認できる。

第 4 章 代表値

4.1 平均値

① 655, ② 12, ③ 31590, ④ 400, ⑤ $2x$, ⑥ $\frac{x}{200} + \frac{x}{600}$

問題 4.1

月収の合計をデータの個数 8 で割ればいいので、相加平均値を求めることになる.

$$\frac{47 + 55 + 30 + 39 + 61 + 61 + 53 + 14}{8} = \frac{360}{8} = 45$$

より, 45 万円ずつとなることがわかる.

問題 4.2

クラス全員の点数の合計を平均点でわれば, クラスの人数がわかる.

$$\frac{3717}{63} = 59$$

より, 人数は 59 であることがわかる.

問題 4.3

学生 10 名のテストの平均点は 68.4 点なので, 合計点は

$$68.4 \times 10 = 684$$

より, 684 点である. つぎに, 一番大きい点数を除いた平均点は 66 点なので, 一番大きい点数を除いた合計は

$$66 \times 9 = 594$$

より, 594 点である. よって, 一番大きい点数は

$$684 - 594 = 90$$

より, 90 点であることがわかる. また, 一番小さい点数を除いた平均点は 70 点なので, 一番小さい点数を除いた合計は

$$70 \times 9 = 630$$

より, 630 点である. よって, 一番小さい点数は

$$684 - 630 = 54$$

より, 54 点であることがわかる.

問題 4.4

3年目の売り上げは1年目の 4×9 倍に伸びている。つまり、1年目から3年目で36倍伸びていることになる。ということは、売り上げの伸びの倍率をならす（平均する）と、

1年目から2年目：6倍

2年目から3年目：さらに6倍

となり、その結果、 6×6 より36倍となったと考えることができる。つまり、1年間の売り上げの伸びの平均倍率は**4と9の幾何平均**

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$$

を使って求められるということである。よって、求める平均倍率は6（倍）であることがわかる。

問題 4.5

Kさんの家から職場までの距離を x km とすると、3日間において職場に行くのに移動した距離は

$$x \times 3 = 3x \text{ (km)}$$

であり、かかった時間の合計は

$$\left(\frac{x}{30} + \frac{x}{45} + \frac{x}{54} \right) \text{時間} \quad \left(\text{時間} = \frac{\text{距離}}{\text{速さ}} \right)$$

である。よって、平均の速さは

$$\frac{3x}{\frac{x}{30} + \frac{x}{45} + \frac{x}{54}} = \frac{3}{\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{54}} \text{ (km/時)} \quad \left(\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} \right)$$

となる。つまり、**30, 45, 54の調和平均**を使って求められるということである。ここで、

$$\frac{3}{\frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{54}} = \frac{3}{\frac{9}{270} + \frac{6}{270} + \frac{5}{270}} = \frac{3}{\frac{20}{270}} = \frac{3}{\frac{2}{27}} = \frac{3 \times 27}{2} = \frac{81}{2} = 40.5$$

なので、3日間での平均の速さは約40.5 km/時 であることがわかる。

4.2 中央値

⑦ 95, 100, ⑧ 60, 65, 65, 95, 100,

⑨ 1000, 1010, 1020, 1020, 1040, 1040, 1060, 1100, 1100, 1100, 10000, 11100, ⑩ 6, ⑪ 7,

⑫ $1040 + 1060 (= 2100)$, ⑬ 910, ⑭ 54, 56, 56, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 84, 96, 98, 100, ⑮ 7

問題 4.6

平均値は

$$\frac{211 + 5500 + 5333 + 1210 + 6010 + 5000 + 5030}{7} = \frac{28294}{7} = 4042$$

より、4042円となる。

つぎに、データを小さい順に並べると、

211, 1210, 5000, 5030, 5333, 5500, 6010

となる。データは全部で7個あるので、真ん中の値は4 ($= (7 + 1)/2$) 番目に小さい値である。つまり、中央値は5030円であることがわかる。

問題 4.7

平均値は

$$\frac{211 + 5500 + 5333 + 1210 + 6010 + 5000 + 5030 + 40010}{8} = \frac{68304}{8} = 8538$$

より、8538円となる。

つぎに、データを小さい順に並べると、

211, 1210, 5000, 5030, 5333, 5500, 6010, 40010

となる。

データは全部で8個あるので、真ん中の値は4 ($= 8/2$) 番目に小さい値または5 ($= 8/2 + 1$) 番目に小さい値である。つまり中央値は、「4番目に小さい値と5番目に小さい値の平均値」であり、

$$\frac{5030 + 5333}{2} = 5181.5$$

より、5181.5円であることがわかる。

4.3 最頻値

⑩ 3, ⑪ 2, ⑫ 6, ⑬ 1

問題 4.8

データを小さい順に並べると、

50, 55, 55, 55, 55, 60, 65, 65, 95, 100

となり、一番多くあらわれるデータは、「55」であることがわかる (4回あらわれる)。よって、最頻値は55点である。

問題 4.9

データを小さい順に並べると、

1000, 1010, 1020, 1020, 1040, 1040, 1060, 1100, 1100, 1100, 10000, 11100

となり、一番多くあらわれるデータは、「1100」であることがわかる (3回あらわれる)。よって、最頻値は1100円である。

問題 4.10

$$\text{平均値} = \frac{\text{合計}}{\text{個数}} \quad \text{より} \quad \text{合計} = \text{平均値} \times \text{個数}$$

なので、求めるデータの合計は

$$4.2 \times 20 = 84$$

より、84 であることがわかる。

問題 4.11

$$\text{平均値} = \frac{\text{合計}}{\text{個数}} \quad \text{より} \quad \text{個数} = \frac{\text{合計}}{\text{平均値}}$$

なので、求めるデータの個数は

$$\frac{1064}{66.5} = 16$$

より、16 であることがわかる。

4.4 Excel による演習

問題 4.12

セル G2 に「=AVERAGE(」と入力し、セル範囲 B2:F2 をドラッグして指定して、Enter キーを押す。セルには「=AVERAGE(B2:F2)」と入力され、A についての 5 科目の平均点 60.4 が返される。このセルを 6 行目まで下にドラッグし、オートフィルする。

G2		✕ ✓ fx		=AVERAGE(B2:F2)				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		数学	物理	化学	国語	英語	平均点	
2	A	65	60	69	55	53	60.4	
3	B	80	91	63	92	95	84.2	
4	C	55	35	60	43	57	50	
5	D	58	30	52	31	53	44.8	
6	E	65	68	69	31	68	60.2	
7	平均点	64.6	56.8	62.6	50.4	65.2		
8	中央値	65	60	63	43	57		
9								
10								

この結果より、5 科目の平均点が最も高いのは B で、その平均点は 84.2 点であることがわかる。

問題 4.13

セル B9 に「=MODE.MULT(」と入力し、セル範囲 B2:B6 をドラッグして指定して、Enter キーを押す。セルには「=MODE.MULT(B2:B6)」と入力され、数学についての 5 人の点数の最頻値 65 が返される。このセルを F 列まで右にドラッグし、オートフィルする。

B9		✕ ✓ fx		=MODE.MULT(B2:B6)				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		数学	物理	化学	国語	英語	平均点	
2	A	65	60	69	55	53	60.4	
3	B	80	91	63	92	95	84.2	
4	C	55	35	60	43	57	50	
5	D	58	30	52	31	53	44.8	
6	E	65	68	69	31	68	60.2	
7	平均点	64.6	56.8	62.6	50.4	65.2		
8	中央値	65	60	63	43	57		
9	最頻値	65	#N/A	69	31	53		
10								
11								

このとき、最頻値が求められない科目は物理であることがわかる（重複しているデータが存在しない）。

問題 4.14

1, 2, 4 の幾何平均値を GEOMEAN 関数を使って求めればいい。

B5		fx		=GEOMEAN(B1:B3)	
	A	B	C	D	E
1		1			
2		2			
3		4			
4					
5	幾何平均値	2			
6					
7					

求める平均倍率は 2（倍）であることがわかる。

問題 4.15

45, 42, 45, 45, 35 の調和平均値を HARMEAN 関数を使って求めればいい。

B7		fx		=HARMEAN(B1:B5)	
	A	B	C	D	E
1		45			
2		42			
3		45			
4		45			
5		35			
6					
7	調和平均値	42			
8					
9					

求める平均の速さは 42 km/時 であることがわかる。

第5章 分散，標準偏差

5.1 分散

① $-30, 15, -45, 40, -5, -5, 30, -35, 35, 0$, ② 0 , ③ 0 ,

④ $(-30)^2 + 15^2 + (-45)^2 + 40^2 + (-5)^2 + (-5)^2 + 30^2 + (-35)^2 + 35^2 + 0^2$, ⑤ 413 , ⑥ 7 , ⑦ 700

問題 5.1

まず，平均値を求めると，

$$\frac{170 + 174 + 182 + 154 + 160 + 170 + 166 + 168}{8} = \frac{1344}{8} = 168$$

より， 168 (cm) であることがわかる．よって，偏差は

$$170 - 168, 174 - 168, 182 - 168, 154 - 168, 160 - 168, 170 - 168, 166 - 168, 168 - 168$$

つまり， $2, 6, 14, -14, -8, 2, -2, 0$ となる．

これより分散は，

$$\frac{2^2 + 6^2 + 14^2 + (-14)^2 + (-8)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 0^2}{8} = \frac{504}{8} = 63$$

と計算され， 63 (cm²) であることがわかる．

問題 5.2

偏差はデータから平均値をひいたものなので，データは偏差に平均値をたしたものである．平均値が5なので，求めるデータの値はそれぞれ

$$-1 + 5, -2 + 5, 2 + 5, 0 + 5, 1 + 5$$

つまり， $4, 3, 7, 5, 6$ となる．

また，分散は，

$$\frac{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

と計算され， 2 であることがわかる．

5.2 標準偏差

⑧ kg², ⑨ 8 , ⑩ 16 , ⑪ 4 , ⑫ 40 , ⑬ 400 , ⑭ 20

問題 5.3

問題 5.1 より分散は 63 (cm²) であることがわかっている．よって，標準偏差は

$$\sqrt{63} = \sqrt{3 \times 3 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

より、 $3\sqrt{7}$ (cm) となる。 $\sqrt{7}$ を 2.646 として計算すると、 $3 \times 2.646 = 7.938$ より、標準偏差は約 7.94 (cm) となることがわかる。

問題 5.4

まず、平均値を求めると、

$$\frac{32 + 36 + 31 + 33 + 37 + 35 + 33 + 36 + 36 + 34}{10} = \frac{343}{10} = 34.3$$

より、34.3 (°C) であることがわかる。 よって、偏差は

$$32 - 34.3, 36 - 34.3, 31 - 34.3, 33 - 34.3, 37 - 34.3, 35 - 34.3, 33 - 34.3, 36 - 34.3, 36 - 34.3, 34 - 34.3$$

つまり、-2.3, 1.7, -3.3, -1.3, 2.7, 0.7, -1.3, 1.7, 1.7, -0.3 となる。

これより分散は、

$$\frac{(-2.3)^2 + 1.7^2 + (-3.3)^2 + (-1.3)^2 + 2.7^2 + 0.7^2 + (-1.3)^2 + 1.7^2 + 1.7^2 + (-0.3)^2}{10} = \frac{36.1}{10} = 3.61$$

と計算され、3.61 (°C²) であることがわかる。 よって、標準偏差は

$$\sqrt{3.61} = \sqrt{\frac{361}{100}} = \sqrt{\frac{19}{10} \times \frac{19}{10}} = \frac{19}{10} (= 1.9)$$

より、 $\frac{19}{10}$ (= 1.9) (°C) となる。

問題 5.5

標準偏差が 16 のとき分散は

$$16 \times 16 = 256$$

より、256 となる。

また、分散が 1.69 のとき標準偏差は

$$\sqrt{1.69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \sqrt{\frac{13}{10} \times \frac{13}{10}} = \frac{13}{10} (= 1.3)$$

より、 $\frac{13}{10}$ (= 1.3) となる。

5.3 Excel による演習

問題 5.6

セル B9 に「=STDEV.P(」と入力し、セル範囲 B2:B6 をドラッグして指定して、Enter キーを押す。セルには「=STDEV.P(B2:B6)」と入力され、数学についての 5 人の点数の標準偏差 8.639... が返される。このセルを F 列まで右にドラッグし、オートフィルする。

	A	B	C	D	E	F	G
1		数学	物理	化学	国語	英語	
2	A	65	60	69	55	53	
3	B	80	91	63	92	95	
4	C	55	35	60	43	57	
5	D	58	30	52	31	53	
6	E	65	68	69	31	68	
7	平均点	64.6	56.8	62.6	50.4	65.2	
8	中央値	65	60	63	43	57	
9	標準偏差	8.639444	22.35531	6.343501	22.62388	15.87955	
10							
11							

問題 5.7

例題 5.6 のファイルを開き、セル範囲 B2:B11 に入力されている 10 個のデータ

161, 155, 162, 158, 165, 159, 155, 165, 165, 155

を下記のデータに変更すればいい。

1.61, 1.55, 1.62, 1.58, 1.65, 1.59, 1.55, 1.65, 1.65, 1.55

問題 5.8

データを入力し、まず U 国について、セル B15 に「=AVERAGE(B2:B13)」を入力して平均値を求め、セル B16 に「=VAR.P(B2:B13)」と入力して分散を求め、セル B17 に「=STDEV.P(B2:B13)」を入力して標準偏差を求める。セル範囲 B15:B17 を C 列まで右にドラッグし、オートフィルする。

そして、E 列と F 列に、U 国のデータについての偏差と M 国のデータについての偏差をそれぞれ計算する。セル E2 に「=」を入力し、セル B2 をクリックする。続けて、「-」を入力し、平均値が計算されたセル (B15) をクリックする。そして、そのまま F4 キーを 2 回押す。すると、「=B2-B\$15」となる (F4 キーを押しても「\$」記号が付かない場合は、Fn キー+F4 キーを押す)。「15」の前に「\$」記号が付き、オートフィルする際に「15 (行目)」が固定される。

このセル (E2) を F 列まで右にドラッグし、オートフィルする。そして、そのまま (セル範囲 E2:F2 が選択されたまま) そのセル範囲を 13 行目まで下にドラッグし、オートフィルする。

つぎに、セル範囲 E1:F13 を選択して、挿入タブの (グラフグループにある) [縦棒/横棒グラフの挿入] の「2-D 縦棒」の「集合縦棒」を選ぶ。グラフタイトルは「月別の気温の偏差」などとする。

第6章 相関

6.1 共分散

① 27, 27, -18, -33, -3, ② C, D, ③ B, ④ 720, ⑤ A, E, ⑥ B, ⑦ C

問題 6.1

まずは、平均点を計算してみると、中間テストについては

$$\frac{30 + 90 + 45 + 90 + 60}{5} = \frac{315}{5} = 63$$

より、63 点となり、期末テストについては

$$\frac{45 + 75 + 30 + 75 + 45}{5} = \frac{270}{5} = 54$$

より、54 点となる。

これより、A, B, C, D, E の順にそれぞれ偏差を計算すると、中間テストの点数については

$$30 - 63, 90 - 63, 45 - 63, 90 - 63, 60 - 63$$

つまり、-33, 27, -18, 27, -3 となり、期末テストの点数については

$$45 - 54, 75 - 54, 30 - 54, 75 - 54, 45 - 54$$

つまり、-9, 21, -24, 21, -9 となることがわかる。

問題 6.2

A, B, C, D, E のそれぞれについて、「中間テストの偏差 × 期末テストの偏差」の値を順に計算すると、

$$(-33) \times (-9), 27 \times 21, (-18) \times (-24), 27 \times 21, (-3) \times (-9)$$

つまり、297, 567, 432, 567, 27 となる。

問題 6.3

中間テストの点数と期末テストの点数の共分散は、A, B, C, D, E のそれぞれについての「中間テストの偏差 × 期末テストの偏差」の平均値である。

$$\frac{297 + 567 + 432 + 567 + 27}{5} = \frac{1890}{5} = 378$$

より、求める共分散は 378 であることがわかる。

6.2 相関係数

⑧ 1280, ⑨ 2880, ⑩ 16, ⑪ 24

問題 6.4

問題 6.1 より, A, B, C, D, E の順にそれぞれ偏差を計算すると, 中間テストの点数については

$$-33, 27, -18, 27, -3$$

となり, 期末テストの点数については

$$-9, 21, -24, 21, -9$$

となることがわかっている. よって, A, B, C, D, E の順にそれぞれ偏差の 2 乗を計算すると, 中間テストの点数については

$$1089, 729, 324, 729, 9$$

となり, 期末テストの点数については

$$81, 441, 576, 441, 81$$

となる. ゆえに, 分散 (偏差² の平均値) を計算すると, 中間テストの点数については

$$\frac{1089 + 729 + 324 + 729 + 9}{5} = \frac{2880}{5} = 576$$

より, 576 となり, 期末テストの点数については

$$\frac{81 + 441 + 576 + 441 + 81}{5} = \frac{1620}{5} = 324$$

より, 324 となる. 標準偏差は「分散の正の平方根」なので, 中間テストの点数については

$$\sqrt{576} = \sqrt{24 \times 24} = 24$$

より, 24 となり, 期末テストの点数については

$$\sqrt{324} = \sqrt{18 \times 18} = 18$$

より, 18 となることがわかる.

問題 6.5

問題 6.4 より, 中間テストの点数の標準偏差は 24 であり, 期末テストについての標準偏差は 18 である. また, 問題 6.3 より, 中間テストの点数と期末テストの点数の共分散は 378 であることがわかっている. よって,

$$\text{相関係数} = \frac{\text{共分散}}{\text{片方の標準偏差} \times \text{もう片方の標準偏差}} = \frac{378}{24 \times 18} = 0.875$$

となり, 求める相関係数は 0.875 であることがわかる.

6.3 相関と因果関係

問題 6.6

「収入が高いと血圧も高い」(年齢が交絡要因である可能性が考えられる)

「各国においてチョコレートの消費量が多いとノーベル賞受賞者も多い」(経済状況が交絡要因である可能性が考えられる)

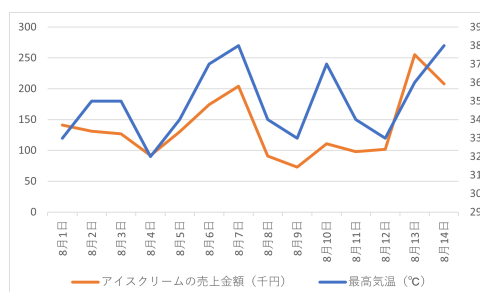
6.4 Excel による演習

問題 6.7

例題 6.5 のファイルを開き、「日にち」と「最高気温」と「アイスクリームの売上金額」の 3 列分 (A1:B15 と D1:D15) を選択して、挿入タブの (グラフグループにある) [折れ線/面グラフの挿入] の「2-D 折れ線」の「折れ線」を選ぶ。ここで、セル範囲 A1:B15 と D1:D15 を同時に選択するときは、A1:B15 を選択したあと、Ctrl キーを押しながら D1:D15 を選択すればいい。グラフタイトルは Delete キーまたは BackSpace キーで削除する。

作成された 2 つの折れ線グラフを見ると、「アイスクリームの売上金額」の増減は見やすいが、「最高気温」の増減は小さくてわかりづらい。

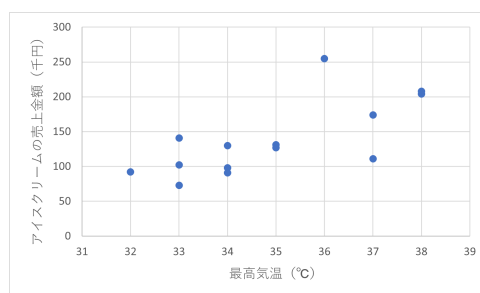
そこで、「最高気温」の折れ線の上で右クリック (またはダブルクリック) して、「データ系列の書式設定」を出し、(系列のオプションの)「第 2 軸 (上/右側)」を選択する。そうすると、「最高気温」については右側の縦軸を使った折れ線グラフになる。



問題 6.8

問題 6.7 のファイルを開き、「最高気温」と「アイスクリームの売上金額」の 2 列分 (B1:B15 と D1:D15) を選択して、挿入タブの (グラフグループにある) [散布図 (X,Y) またはバブルチャートの挿入] の「散布図」を選ぶ。ここで、セル範囲 B1:B15 と D1:D15 を同時に選択するときは、B1:B15 を選択したあと、Ctrl キーを押しながら D1:D15 を選択すればいい。横軸が「最高気温」(B 列) で縦軸が「アイスクリームの売上金額」(C 列) である。

作成したグラフを選択した状態で、グラフのデザインタブの (グラフのレイアウトグループにある) [グラフ要素の追加] をクリックし、「軸ラベル」の「第 1 横軸」を選択すると (横) 軸ラベルが出てくる。(横) 軸ラベルに「最高気温 (°C)」と入力する。同様に、(縦) 軸ラベルも出し、「アイスクリームの売上金額 (千円)」と入力する。グラフタイトルは Delete キーまたは BackSpace キーで削除する。



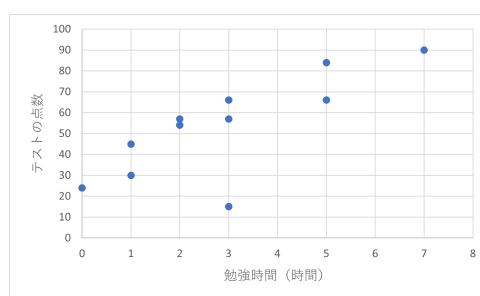
問題 6.9

問題 6.8 のファイルを開き、作成した散布図の近くのセルに「=CORREL(」と入力し、「最高気温」のデータが入力されているセル範囲（B2:B15）をドラッグして選択したあと、Ctrl キーを押しながら、「アイスクリームの売上金額」のデータが入力されているセル範囲（D2:D15）をドラッグして選択する。

そして、Enter キーを押すと相関係数の値約 0.71 が計算される（セルには「=CORREL(B2:B15,D2:D15)」と入力されていることが確認できる）。

問題 6.10

データを入力し、「勉強時間」と「テストの点数」の 2 列分を選択して、挿入タブの（グラフグループにある）「散布図 (X,Y) またはバブルチャートの挿入」の「散布図」を選ぶ。作成したグラフを選択した状態で、グラフのデザインタブの（グラフのレイアウトグループにある）「グラフ要素の追加」をクリックし、「軸ラベル」の「第 1 横軸」を選択すると（横）軸ラベルが出てくる。（横）軸ラベルに「勉強時間（時間）」と入力する。同様に、（縦）軸ラベルも出し、「テストの点数」と入力する。



また、作成した散布図の近くのセルに「=CORREL(」と入力し、「勉強時間」のデータが入力されているセル範囲をドラッグして選択したあと、Ctrl キーを押しながら、「テストの点数」のデータが入力されているセル範囲をドラッグして選択する。

そして、Enter キーを押すと相関係数の値約 0.78 が計算される。

第7章 ベクトルの演算

7.1 ベクトルと行列

① 22, ② 23, ③ 520, ④ 370, ⑤ (2, 2), ⑥ (2, 3), ⑦ (2, 1)

問題 7.1

「赤ワイン2本, 白ワイン2本, ロゼワイン1本」のつめあわせは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

というベクトルであらわすことができ, 「赤ワイン3本, 白ワイン0本, ロゼワイン2本」のつめあわせは

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

というベクトルであらわすことができる.

問題 7.2

(1) 2行4列 (2) 5行2列 (3) 3行4列 (4) 1行5列

問題 7.3

(1) 60 (2) 40 (3) -98 (4) -80

7.2 ベクトルの和とスカラー倍

$$\textcircled{8} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \textcircled{9} \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix}, \textcircled{10} \begin{pmatrix} 46 \\ 19 \end{pmatrix}$$

問題 7.4

ベクトルの和として, 次のようにあらわすことができる.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2+3 \\ 3+2+0 \\ 1+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のようにあらわすことができる.

問題 7.5

$$(1) \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$$

問題 7.6

ベクトルのスカラー倍と和として

$$2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 \\ 2 \times 3 \\ 2 \times 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times 2 \\ 3 \times 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \times 3 \\ 1 \times 0 \\ 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + 3 \times 2 + 1 \times 3 \\ 2 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 0 \\ 2 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

のようにあらわすことができる。

問題 7.7

$$(1) \begin{pmatrix} 21 \\ 42 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \end{pmatrix}$$

問題 7.8

$$(1) (2a - b) + (a - 2b) = 2a + a - b - 2b = 3a - 3b = 3(a - b)$$

$$= 3 \left(\begin{pmatrix} 34 \\ -35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -56 \\ 65 \end{pmatrix} \right) = 3 \begin{pmatrix} 90 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ -300 \end{pmatrix}$$

$$(2) 2(7a + 3b) - 3(5a + 2b) = 14a + 6b - 15a - 6b = -a$$

$$= - \begin{pmatrix} 34 \\ -35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ 35 \end{pmatrix}$$

7.3 ベクトルの内積

⑪ 35, ⑫ 28, ⑬ 35, ⑭ 0, ⑮ -35, ⑯ -4, ⑰ -5, ⑱ -92, ㉑ 25

問題 7.9

$$(1) 2 \times 3 + 1 \times 5 = 11$$

$$(2) 3 \times (-8) + 6 \times 4 = 0$$

$$(3) 1 \times 10 + 5 \times (-2) + (-5) \times 3 = -15$$

$$(4) \frac{1}{100} (20 \times (-50) + 70 \times 40) = \frac{1}{100} \times 1800 = 18$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \times 13 + 2 \times (-1) + 7 \times (-4) = -4$$

問題 7.10

$$(1) \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} = 9 \times 9 + (-2) \times (-2) = 85 \text{ である.}$$

よって, $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{85}$ であることがわかる.

$$(2) \begin{pmatrix} 3/1000 \\ 21/1000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/1000 \\ 21/1000 \end{pmatrix} = \frac{3}{1000} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{1000} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{1000} \times \frac{3}{1000} \right) (1 \times 1 + 7 \times 7) = \left(\frac{3}{1000} \times \frac{3}{1000} \right) \times 50$$

である.

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} 3/1000 \\ 21/1000 \end{pmatrix} \text{ の大きさは, } \sqrt{\frac{3}{1000} \times \frac{3}{1000} \times 50} = \sqrt{\frac{3}{1000} \times \frac{3}{1000} \times 5 \times 5 \times 2} = \frac{3}{1000} \times 5 \times \sqrt{2}$$

$$= \frac{3}{200} \sqrt{2} \text{ より, } \frac{3}{200} \sqrt{2} \text{ であることがわかる.}$$

$$(3) \frac{19}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{19}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \left(\frac{19}{5} \times \frac{19}{5} \right) ((-4) \times (-4) + (-3) \times (-3)) = \left(\frac{19}{5} \times \frac{19}{5} \right) \times 25 \text{ である.}$$

よって, $\frac{19}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ の大きさは, $\sqrt{\frac{19}{5} \times \frac{19}{5} \times 25} = \sqrt{\frac{19}{5} \times \frac{19}{5} \times 5 \times 5} = \frac{19}{5} \times 5 = 19$ より, 19 であることがわかる.

$$(4) \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = (10 \times 10 + 20 \times 20 + 30 \times 30) = 1400 \text{ である.}$$

よって, $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ の大きさは, $\sqrt{1400} = \sqrt{10 \times 10 \times 14} = 10\sqrt{14}$ より, $10\sqrt{14}$ であることがわかる.

問題 7.11

たとえば,

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \end{pmatrix} = -10 \times 19 + 19 \times 10 = 0$$

となることが確認できるので, $\begin{pmatrix} 19 \\ 10 \end{pmatrix}$ は求めるベクトルであることがわかる. ほかに, $\begin{pmatrix} -19 \\ -10 \end{pmatrix}$ などでもいい.

問題 7.12

たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

となることが確認できるので, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は互いに直交する 2 つの 2 次元ベクトルの組の例であるとい

うことがわかる.

問題 7.13

たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

となることが確認できるので, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はそれらのどの対も互いに直交するような3つの3次元ベクトルの組の例であるということがわかる.

7.4 Excel による演習

問題 7.14

例題 7.12 または例題 7.13 のファイルにおいて, セル A2 を「84」, セル A3 を「-13」, セル C3 を「-36」にそれぞれ入力し直す. これら以外はそのままでいい.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a		b		a+b		a-b		2a+3b	
2	84		-77		7		161		-63	
3	-13		-36		-49		23		-134	
4										
5					a · b		 a 		 b 	
6					-6000		85		85	
7										

第 8 章 行列の演算

8.1 行列の和とスカラー倍

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 44 & 55 & 66 \end{pmatrix}, \textcircled{2} \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 44 \\ 55 & 66 \end{pmatrix}, \textcircled{3} \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}, \textcircled{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, \textcircled{5} \begin{pmatrix} -2 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

問題 8.1

$$(1) \begin{pmatrix} 21+13 & -23-24 \\ 33+37 & -17-50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -47 \\ 70 & -67 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 5+9 & -8+12 & -6+10 & 4+1 \\ 10+6 & -7-2 & 3+11 & 12-8 \\ -11+3 & -2-7 & 9+5 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 & 5 \\ 16 & -9 & 14 & 4 \\ -8 & -9 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

問題 8.2

3 行 2 列のゼロ行列は $O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。また、1 行 3 列のゼロ行列は $O_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

問題 8.3

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 & -6-(-6) \\ -3-(-3) & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 12 & 10 \\ -2 & -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3/2 & -11-1 \\ 12-4 & 10-(-3) \\ -2-(-5) & -16-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -12 \\ 8 & 13 \\ 3 & -20 \end{pmatrix}$$

問題 8.4

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ -15 & -20 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+(-2) & -10+1 & -5+(-3) \\ -15+(-4) & -20+2 & 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & -8 \\ -19 & -18 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(2) 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) & 2 \times 1 & 2 \times (-3) \\ 2 \times (-4) & 2 \times 2 & 2 \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ -8 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ -15 & -20 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-2) & -10-1 & -5-(-3) \\ -15-(-4) & -20-2 & 0-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -2 \\ -11 & -22 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ -15 & -20 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ -8 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ -8 & 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - (-4) & -2 - 2 & -1 - (-6) \\ -3 - (-8) & -4 - 4 & 0 - (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

8.2 行列の積

$$\textcircled{6} \begin{pmatrix} 3100 \\ 3340 \end{pmatrix}, \textcircled{7} \begin{pmatrix} 42000 \\ 14200 \end{pmatrix}, \textcircled{8} \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}, \textcircled{9} \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}, \textcircled{10} \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \textcircled{11} \begin{pmatrix} 105 \\ 143 \end{pmatrix}, \textcircled{12} \begin{pmatrix} 391 \\ 887 \end{pmatrix}, \textcircled{13} \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix},$$

$$\textcircled{14} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}, \textcircled{15} \begin{pmatrix} 29 \\ 67 \end{pmatrix}, \textcircled{16} \begin{pmatrix} 105 \\ 143 \end{pmatrix}, \textcircled{17} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \textcircled{18} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \textcircled{19} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \textcircled{20} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 8.5

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-2) + 3 \times (-6) \\ 5 \times (-2) + 7 \times (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -52 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-2) + 3 \times (-6) & 1 \times (-4) + 3 \times (-8) \\ 5 \times (-2) + 7 \times (-6) & 5 \times (-4) + 7 \times (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -28 \\ -52 & -76 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 6 \times 5 + 9 \times 10 \\ (-2) \times 1 + (-4) \times 5 + (-6) \times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ -82 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 6 \times 5 + 9 \times 10 & 3 \times (-1) + 6 \times (-5) + 9 \times (-10) \\ (-2) \times 1 + (-4) \times 5 + (-6) \times 10 & (-2) \times (-1) + (-4) \times (-5) + (-6) \times (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 & -123 \\ -82 & 82 \end{pmatrix}$$

問題 8.6

$$(1) \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -6 \times 2 + 3 \times (-4) = -24$$

((1, 2) 型 \times (2, 1) 型 = (1, 1) 型)

$$(2) \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 5 \times 1 + (-2) \times (-4) + (-3) \times (-6) = 31$$

((1, 3) 型 \times (3, 1) 型 = (1, 1) 型)

$$(3) \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 3 & 8 \times (-10) \\ -1 \times 3 & (-1) \times (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -80 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

((2, 1) 型 \times (1, 2) 型 = (2, 2) 型)

$$(4) \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times (-4) & 5 \times 9 & 5 \times 0 \\ (-3) \times (-4) & (-3) \times 9 & (-3) \times 0 \\ 11 \times (-4) & 11 \times 9 & 11 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 45 & 0 \\ 12 & -27 & 0 \\ -44 & 99 & 0 \end{pmatrix}$$

$((3,1) \text{ 型} \times (1,3) \text{ 型}) = (3,3) \text{ 型}$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{積は定義されない.}$$

$((3,1) \text{ 行列と } (2,2) \text{ 行列の積は定義されない})$

問題 8.7

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 3 & 1 \times 2 + 0 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{積は定義されない.}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 9 & -12 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{積は定義されない.}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 0 + 1 \times 2 & 4 \times 3 + 1 \times 0 & 4 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 3 \times 0 + 2 \times 2 & 3 \times 3 + 2 \times 0 & 3 \times 1 + 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 3 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 6 \times 1 & 1 \times (-1) + 6 \times 0 \\ 2 \times 0 + 5 \times 1 & 2 \times (-1) + 5 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times (-1) + 4 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 8.8

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ -19 \end{pmatrix} = 2 \times (-10) + 7 \times (-19) = -153$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 7 \times (-1) & 2 \times 4 + 7 \times (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -48 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -10 \\ -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \times 2 & -10 \times 7 \\ -19 \times 2 & -19 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -70 \\ -38 & -133 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -10 \\ -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{積は定義されない}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{積は定義されない}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times (-10) + 4 \times (-19) \\ -1 \times (-10) + (-8) \times (-19) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -126 \\ 162 \end{pmatrix}$$

8.3 Excel による演習

問題 8.9

例題 8.11 のファイルにおいて，セル範囲 A2:B3 を $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ ，セル範囲 D2:E3 を $\begin{pmatrix} 87 & -53 \\ -93 & -19 \end{pmatrix}$ にそれぞれ入力し直す．これら以外はそのままがいい．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	A			B			A+B			A-B			2A+3B		
2	1	7		87	-53		88	-46		-86	60		263	-145	
3	2	9		-93	-19		-91	-10		95	28		-275	-39	
4															
5							AB			BA					
6							-564	-186		-19	132				
7							-663	-277		-131	-822				
8															

問題 8.10

(1) たとえば，下記のように入力し，セル I2 に「=-1/3*A2:C3-3*E2:G3」と入力すると，

$$(-1/3)A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & -40 & -44 \\ 16 & 57 & 0 \end{pmatrix}$$

が計算される．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	A				B				(-1/3)A-3B			
2	33	84	42		-5	4	10					
3	-21	-90	-63		-3	-9	7					
4												

(2) たとえば，下記のように入力し，セル I2 に「=13*A2:C2-4/5*E2:G2」と入力すると，

$$13A - (4/5)B = \begin{pmatrix} -1129 & -97 & 299 \end{pmatrix}$$

が計算される．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	A				B				13A-(4/5)B			
2	-89	-1	23		-35	105	0					
3												

問題 8.11

(1) たとえば，下記のように入力し，セル H2 に「=MMULT(A2:B5,D2:F3)」と入力すると，求める積

$$\begin{pmatrix} 2865 & 8058 & -2589 \\ 2863 & 6156 & -1669 \\ 3527 & 8862 & -2675 \\ -2624 & 3486 & -2890 \end{pmatrix} \text{ が計算される.}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	A			B				AB			
2		87	-3		34	90	-28				
3		76	9		31	-76	51				
4		101	3								
5		-17	-66								
6											

(2) たとえば、下記のように入力し、セル I2 に「=MMULT(A2:B5,D2:G3)」と入力すると、求める積

$$\begin{pmatrix} 2865 & 8058 & -2589 & 2499 \\ 2863 & 6156 & -1669 & 1939 \\ 3527 & 8862 & -2675 & 2765 \\ -2624 & 3486 & -2890 & 910 \end{pmatrix}$$

が計算される。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	A			B					AB				
2		87	-3		34	90	-28	28					
3		76	9		31	-76	51	-21					
4		101	3										
5		-17	-66										
6													

(3) たとえば、下記のように入力し、セル H2 に「=MMULT(A2:A5,C2:F2)」と入力すると、求める積

$$\begin{pmatrix} 2958 & 7830 & -2436 & 2436 \\ 2584 & 6840 & -2128 & 2128 \\ 3434 & 9090 & -2828 & 2828 \\ -578 & -1530 & 476 & -476 \end{pmatrix}$$

が計算される。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	A		B					AB				
2		87		34	90	-28	28					
3		76										
4		101										
5		-17										
6												

(4) たとえば、下記のように入力し、セル M2 に「=MMULT(C2:F2,A2:A5)」と入力すると、求める積

$$(6494)$$

が計算される。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	A		B					AB					BA	
2		87		34	90	-28	28	2958	7830	-2436	2436			
3		76						2584	6840	-2128	2128			
4		101						3434	9090	-2828	2828			
5		-17						-578	-1530	476	-476			
6														

第9章 多項式関数

9.1 多項式関数とは

① $(100 \times 2 =) 200$, ② $(100 \times 3 + 2000 =) 2300$, ③ $(2 \times 3 + 1 =) 7$, ④ 16

問題 9.1

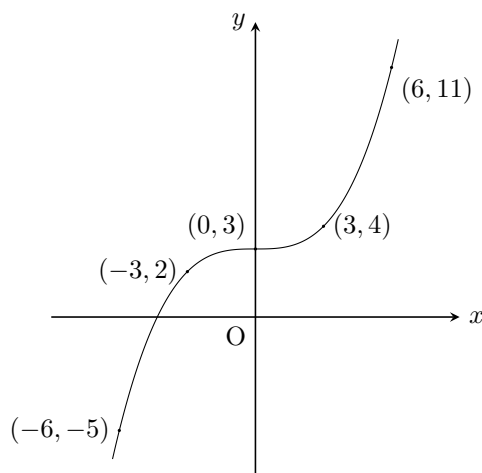
(1) y は x の関数である. $y = 80x + 300$ とあらわすことができる (定義域は集合 $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$).

(2) y は x の関数である. $x + y = 24$ より, $y = -x + 24$ とあらわすことができる (定義域は集合 $\{x \mid 0 \leq x < 24\}$).

(3) y は x の関数である. $y = x^2$ とあらわすことができる (定義域は $(-\infty, \infty)$, つまり, すべての実数からなる集合).

(4) y は x の関数ではない. たとえば, $3^2 = 9$ でもあるし, $(-3)^2 = 9$ でもある. ゆえに, 9 に対して, 9 の平方根 (2 個かけあわせると 9 になる数) はひとつに決まらない.

問題 9.2



9.2 1 次関数のグラフ

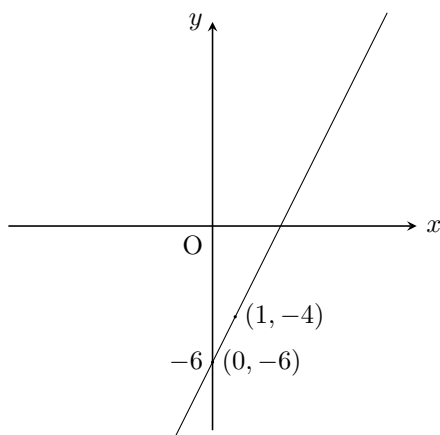
⑤ 2 , ⑥ 1 , ⑦ $(0, 5)$, ⑧ $(1, -2)$, ⑨ $y = -x + 3$, ⑩ $y = -3x - 2$, ⑪ $y = \frac{1}{2}x - 1$

問題 9.3

(1) 求める 1 次関数を $y = ax + b$ とおくと, $a = 2$, $b = -6$ となるので, $y = 2x - 6$ であることがわかる.

y 切片が -6 なので, 直線は点 $(0, -6)$ を通る. また, 傾きが 2 なので, x が 1 増えたとき y は 2 だけ増える. これより, 直線は点 $(1, -4)$ を通ることがわかる.

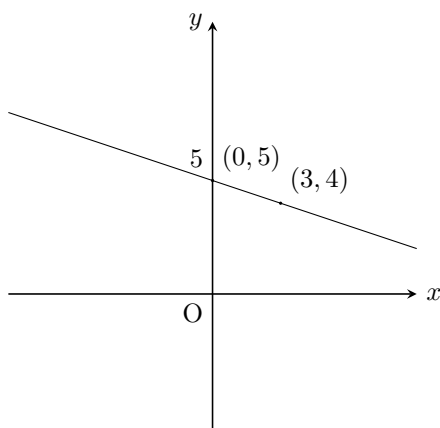
よって、グラフは下記のようなになる。



(2) 求める1次関数を $y = ax + b$ とおくと、 $a = -\frac{1}{3}$ 、 $b = 5$ となるので、 $y = -\frac{1}{3}x + 5$ であることがわかる。

直線は点 $(0, 5)$ を通る。また、傾きが $-\frac{1}{3}$ なので、 x が1増えたとき y は $-\frac{1}{3}$ だけ増える、つまり、 $\frac{1}{3}$ だけ減る。 x が3増えたときは y は1だけ減ることになるので、直線は点 $(3, 4)$ を通ることがわかる。

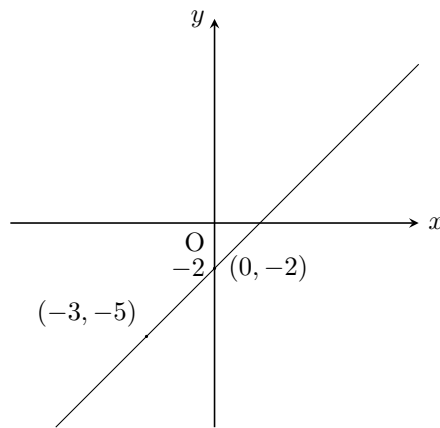
よって、グラフは下記のようなになる。



(3) 求める1次関数を $y = ax + b$ とおくと、 $a = 1$ となり、 $y = x + b$ となる。直線は点 $(-3, -5)$ を通るので、 $x = -3$ のとき $y = -5$ である。これを代入すると、 $-5 = -3 + b$ となり、これより、 $b = -2$ である。

つまり、求める1次関数は $y = x - 2$ であることがわかる。

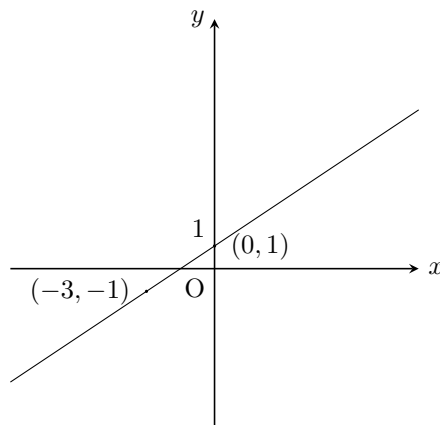
y 切片が -2 なので、直線は点 $(0, -2)$ を通る。さらに点 $(-3, -5)$ を通ることから、グラフは下記のようなになる。



(4) 求める1次関数を $y = ax + b$ とおくと、 $b = 1$ となり、 $y = ax + 1$ となる。直線は点 $(-3, -1)$ を通るので、 $x = -3$ のとき $y = -1$ である。これを代入すると、 $-1 = -3a + 1$ となり、これより、 $a = \frac{2}{3}$ である。

つまり、求める1次関数は $y = \frac{2}{3}x + 1$ であることがわかる。

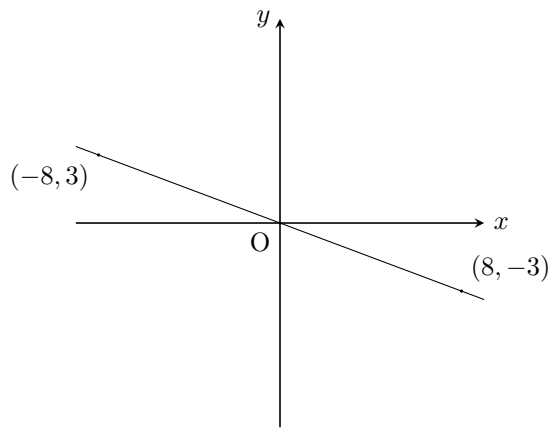
y 切片が 1 なので、直線は点 $(0, 1)$ を通る。さらに点 $(-3, -1)$ を通ることから、グラフは下記のようになる。



(5) 求める1次関数を $y = ax + b$ とおく。直線は点 $(-8, 3)$ を通るので、 $x = -8$ のとき $y = 3$ である。これを代入すると、 $3 = -8a + b$ となるので、 $b = 8a + 3$ となる。また、直線は点 $(8, -3)$ を通るので、 $x = 8$ のとき $y = -3$ である。これを代入すると、 $-3 = 8a + b$ となる。 $b = 8a + 3$ を代入すると、 $-3 = 8a + 8a + 3$ となるので、 $a = -\frac{3}{8}$ であることがわかる。これより、 $b = 8 \times \left(-\frac{3}{8}\right) + 3 = 0$ であることもわかる。

つまり、求める1次関数は $y = -\frac{3}{8}x$ である。

直線は点 $(-8, 3)$ 、点 $(8, -3)$ を通ることから、グラフは下記のようになる。



問題 9.4

(1) 問題の直線があらわす 1 次関数を $y = ax + b$ とおくと、 $a = -9$ となり、 $y = -9x + b$ となる。直線は点 $(12, 10)$ を通るので、 $x = 12$ のとき $y = 10$ である。これを代入すると、 $10 = -108 + b$ となり、これより、 $b = 118$ である。

つまり、問題の直線があらわす 1 次関数は $y = -9x + 118$ であることがわかる。 y 切片が 118 ということなので、求める y 軸との交点の座標は $(0, 118)$ である。

(2) 問題の 1 次関数を $y = ax + b$ とおくと、そのグラフの直線が 1 次関数 $y = \frac{1}{8}x - 16$ のグラフの直線に平行なので、傾き $a = \frac{1}{8}$ となる。また、 $(0, 31)$ を通るので、 y 切片 $b = 31$ である。

よって、問題の 1 次関数は $y = \frac{1}{8}x + 31$ となり、 $x = -32$ のとき $y = \frac{1}{8} \times (-32) + 31 = 27$ である。

(3) 問題の 1 次関数を $y = ax + b$ とおく。直線は点 $(-1, -9)$ を通るので、 $x = -1$ のとき $y = -9$ である。これを代入すると、 $-9 = -a + b$ となるので、 $b = a - 9$ となる。また、直線は点 $(2, 16)$ も通るので、 $x = 2$ のとき $y = 16$ である。これを代入すると、 $16 = 2a + b$ となる。 $b = a - 9$ を代入すると、 $16 = 2a + a - 9$ となるので、 $a = \frac{25}{3}$ であることがわかる。これより、 $b = \frac{25}{3} - 9 = -\frac{2}{3}$ であることもわかる。

つまり、問題の 1 次関数は $y = \frac{25}{3}x - \frac{2}{3}$ である。 $x = 1$ を代入すると、 $y = \frac{25}{3} \times 1 - \frac{2}{3} = \frac{23}{3}$ となることがわかる。

9.3 2 次関数のグラフ

⑫ -16, ⑬ 8, ⑭ 3, ⑮ 1, ⑯ 1, ⑰ 8, ⑱ 8, ⑲ -10, ⑳ -1

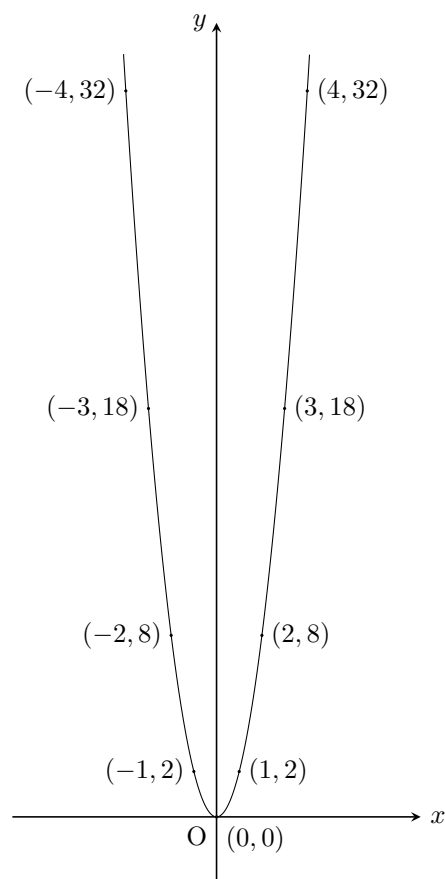
問題 9.5

$y = 2x^2$ は $y = 2(x - 0)^2 + 0$ と変形できるので、そのグラフは頂点 $(0, 0)$ の放物線になる。また、これは下に凸な関数である。

$f(x) = 2x^2$ ($= 2 \times x \times x$) とおくと、たとえば、

$$f(-4) = 32, f(-3) = 18, f(-2) = 8, f(-1) = 2, f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 8, f(3) = 18, f(4) = 32$$

となるので、グラフは下記のようなになる。



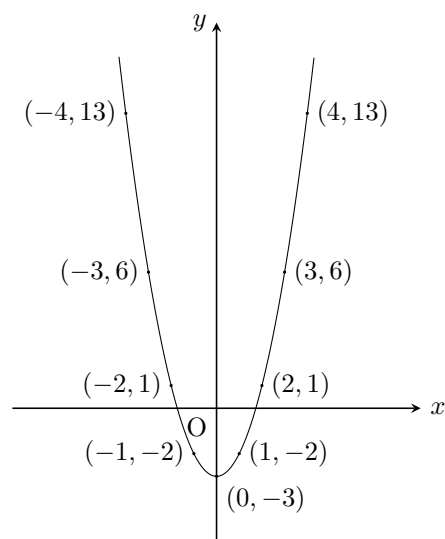
問題 9.6

2 次関数 $y = x^2 - 3$ は $y = (x-0)^2 - 3$ と変形できる．よって，そのグラフは頂点 $(0, -3)$ の放物線になり，頂点 $(0, 0)$ の 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを y 軸方向に（縦に） -3 だけ平行移動させたものである．また，これは下に凸な関数である．

$f(x) = x^2 - 3$ ($= x \times x - 3$) とおくと，たとえば，

$$f(-4) = 13, f(-3) = 6, f(-2) = 1, f(-1) = -2, f(0) = -3, f(1) = -2, f(2) = 1, f(3) = 6, f(4) = 13$$

となるので，グラフは下記のようなになる．



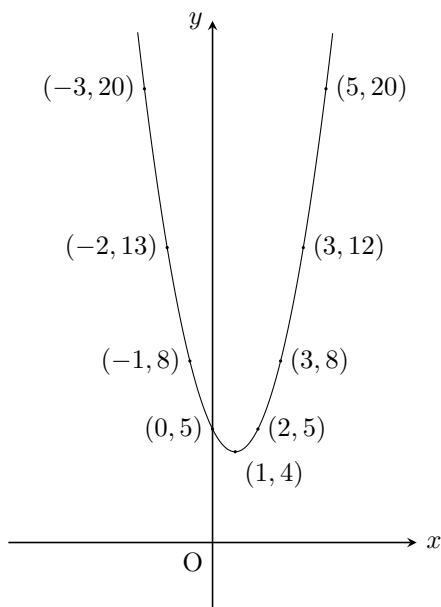
問題 9.7

2 次関数 $y = x^2 - 2x + 5$ は $y = (x - 1)^2 + 4$ と変形できる．そのグラフは頂点 $(1, 4)$ の放物線になり，2 次関数 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に（横に）1 だけ， y 軸方向に（縦に）4 だけ平行移動させたものである．また，これは下に凸な関数である．

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ とおくと，たとえば，

$$f(-3) = 20, f(-2) = 13, f(-1) = 8, f(0) = 5, f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 8, f(4) = 13, f(5) = 20$$

となるので，グラフは下記のようなになる．



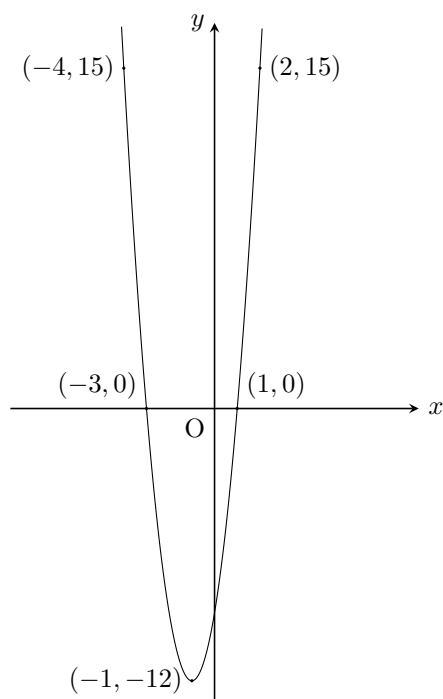
問題 9.8

2 次関数 $y = 3x^2 + 6x - 9$ は $y = 3(x^2 + 2x) - 9 = 3((x + 1)^2 - 1) - 9 = 3(x + 1)^2 - 3 - 9 = 3(x + 1)^2 - 12$ と変形できる．よって，そのグラフは頂点 $(-1, -12)$ の放物線になり，2 次関数 $y = 3x^2$ のグラフを x 軸方向に（横に）-1 だけ， y 軸方向に（縦に）-12 だけ平行移動させたものである．また，これは下に凸な関数である．

$f(x) = 3x^2 + 6x - 9$ とおくと，たとえば，

$$f(-4) = 15, f(-3) = 0, f(-1) = -12, f(1) = 0, f(2) = 15$$

となるので，グラフは下記のようなになる．



問題 9.9

求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと、このグラフが点 $(-1, 13)$, $(0, 7)$, $(2, 1)$ の 3 点を通ることから、

$$13 = a - b + c, \quad 7 = c, \quad 1 = 4a + 2b + c$$

となる。この連立方程式を解くと、 $a = 1$, $b = -5$, $c = 7$ となる。

よって、求める 2 次関数は $y = x^2 - 5x + 7$ であることがわかる。

問題 9.10

グラフと x 軸との交点が $(3, 0)$ と $(-9, 0)$ であることから、求める 2 次関数は $y = a(x - 3)(x + 9)$ とおくことができる。このグラフが点 $(0, -54)$ を通ることから、

$$-54 = a \times (-3) \times 9$$

となる。これを解くと、 $a = 2$ となる。

よって、求める 2 次関数は $y = 2(x - 3)(x + 9)$ ($y = 2x^2 + 12x - 54$) であることがわかる。

問題 9.11

求める 2 次関数は、グラフの放物線の頂点が $(1, -5)$ なので、 $y = a(x - 1)^2 - 5$ とおくことができる。このグラフは点 $(-4, 0)$ を通るので、

$$0 = a(-4 - 1)^2 - 5$$

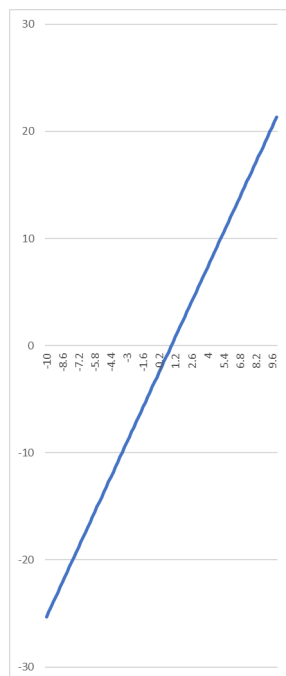
となり、 $a = \frac{1}{5}$ であることがわかる。

よって、求める 2 次関数は $y = \frac{1}{5}(x - 1)^2 - 5$ ($y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{24}{5}$) である。

9.4 Excel による演習

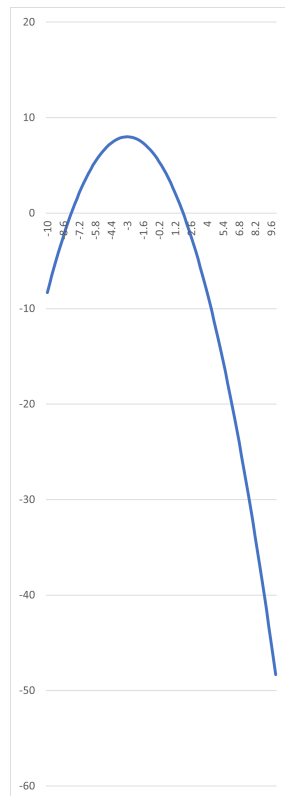
問題 9.12

例題 9.15 のファイルにおいて、セル B2 を「 $=7/3*A2-2$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



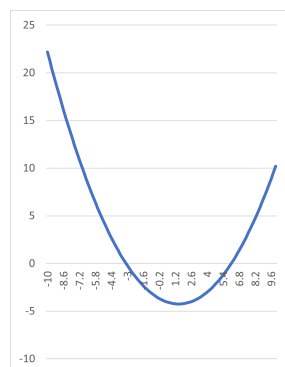
問題 9.13

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「 $=-1/3*A2^2-2*A2+5$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



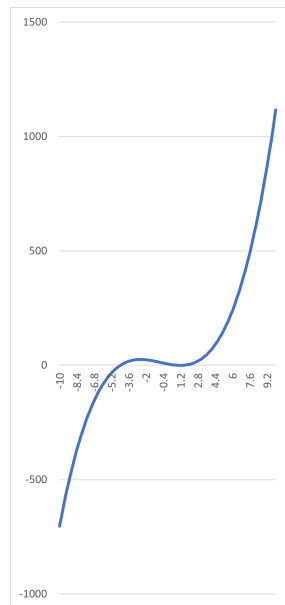
問題 9.14

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「 $=1/5*A2^2-3/5*A2-19/5$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



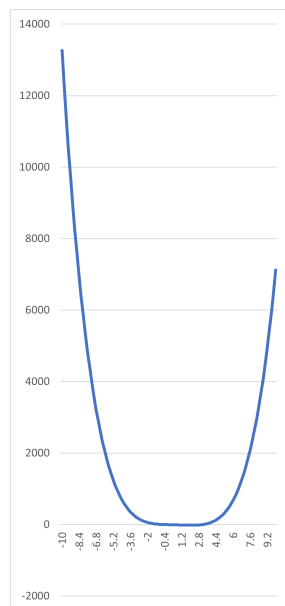
問題 9.15

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「 $=A2^3+2*A2^2-9*A2+6$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 9.16

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「 $=A2^4-3*A2^3+2*A2^2-7*A2-3$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



第 10 章 指数関数

10.1 指数の意味

① 16, ② 4, ③ $\frac{1}{2}$, ④ $\frac{1}{8}$, ⑤ $\frac{1}{32}$, ⑥ $\frac{1}{1000}$, ⑦ 100, ⑧ $\frac{49}{9}$, ⑨ $\frac{4}{5}$, ⑩ 6, ⑪ -6 , ⑫ 1, ⑬ 2, ⑭ 10, ⑮ 0.2,
⑯ $\frac{1}{10}$

問題 10.1

(1) $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

(2) $3^2 \times 3^3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3) = 243$

(3) $\frac{3^7}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{1} = 243$

(4) $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 729$

(5) $3^{(2 \times 3)} = 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$

(6) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) = 32 \times 243 = 7776$

(7) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{32}{243}$

(8) $\sqrt{5}^2 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

問題 10.2

$$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243,$$

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81,$$

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27,$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9,$$

$$3^1 = 3$$

というように、3 をかける回数を減らしていくと、それぞれ順に $\frac{1}{3}$ 倍になっていくことが確認できる。この規則をあてはめ自然に拡張すると、

$$3^0 = 1,$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \left(= \frac{1}{3^1} \right),$$

$$3^{-2} = \frac{1}{9} \left(= \frac{1}{3^2} \right),$$

$$3^{-3} = \frac{1}{27} \left(= \frac{1}{3^3} \right),$$

$$3^{-4} = \frac{1}{81} \left(= \frac{1}{3^4} \right),$$

$$3^{-5} = \frac{1}{243} \left(= \frac{1}{3^5} \right)$$

となっていくことがわかる.

問題 10.3

$$(1) 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{64}$$

$$(2) 71^{-1} = \frac{1}{71}$$

$$(3) \sqrt{1210^0} = 1$$

$$(4) \left(\frac{6}{5} \right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{6}{5} \right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \right)} = \frac{1}{\left(\frac{36}{25} \right)} = \frac{25}{36}$$

問題 10.4

$$(1) 81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = \sqrt{9 \times 9} = 9$$

$$(2) 32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2$$

$$(3) 1000000^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1000000} = \sqrt[6]{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10$$

$$(4) \left(\frac{1}{625} \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \sqrt[4]{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

問題 10.5

$$(1) 9^{-\frac{1}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} = (\sqrt{9})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

$$(2) 1000^{\frac{2}{3}} = \left(1000^{\frac{1}{3}} \right)^2 = (\sqrt[3]{1000})^2 = 10^2 = 100$$

$$(3) 25^{\frac{3}{2}} = \left(25^{\frac{1}{2}} \right)^3 = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$$

$$(4) 8^{-\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}} \right)^{-2} = (\sqrt[3]{8})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$(5) 10000000000^{-\frac{2}{5}} = \left(10000000000^{\frac{1}{5}} \right)^{-2} = (\sqrt[5]{10000000000})^{-2} = (\sqrt[5]{100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100})^{-2} \\ = 100^{-2} = \frac{1}{100^2} = \frac{1}{10000}$$

$$(6) \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \right)^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(7) \left(\frac{1}{10000} \right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\left(\frac{1}{10000} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{-1} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{10000}} \right)^{-1} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{10} \right)^{-1} \\ = \frac{1}{\left(\frac{1}{10} \right)^1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10} \right)} = 10$$

$$(8) \left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{125}}\right)^{-4} = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{16}{625}\right)} = \frac{625}{16}$$

問題 10.6

$$(1) 9^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 9^2 = 81$$

$$(2) (36 \times 81)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} \times 81^{\frac{1}{2}} = 6 \times 9 = 54$$

$$(3) \frac{16^{\frac{5}{4}}}{16} = \frac{16^{\frac{5}{4}}}{16^1} = 16^{\frac{5}{4} - 1} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$$

$$(4) \left(\frac{343}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{343^{\frac{1}{3}}}{1000^{\frac{1}{3}}} = \frac{7}{10}$$

$$(5) \left(11^{\frac{2}{5}}\right)^5 = 11^{\frac{2}{5} \times 5} = 11^2 = 121$$

$$(6) 10^{\frac{5}{7}} \times 10^{\frac{9}{7}} = 10^{\frac{5}{7} + \frac{9}{7}} = 10^2 = 100$$

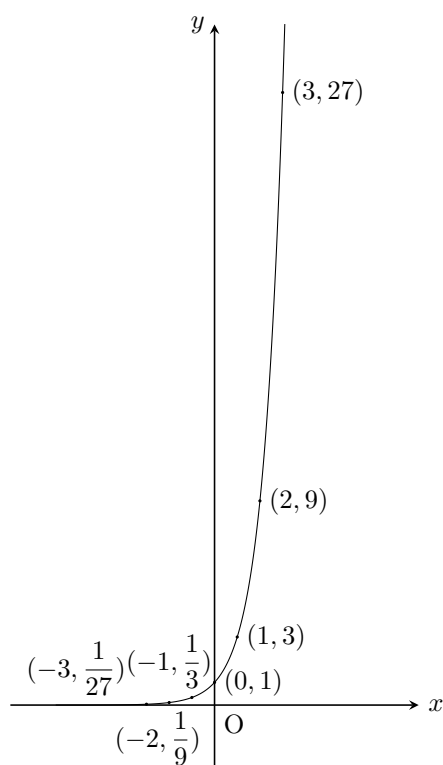
$$(7) \frac{169^{\frac{13}{4}}}{169^{\frac{11}{4}}} = 169^{\frac{13}{4} - \frac{11}{4}} = 169^{\frac{1}{2}} = 13$$

$$(8) (27 \times 1000000)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \times 1000000^{\frac{1}{3}} = 3 \times 100 = 300$$

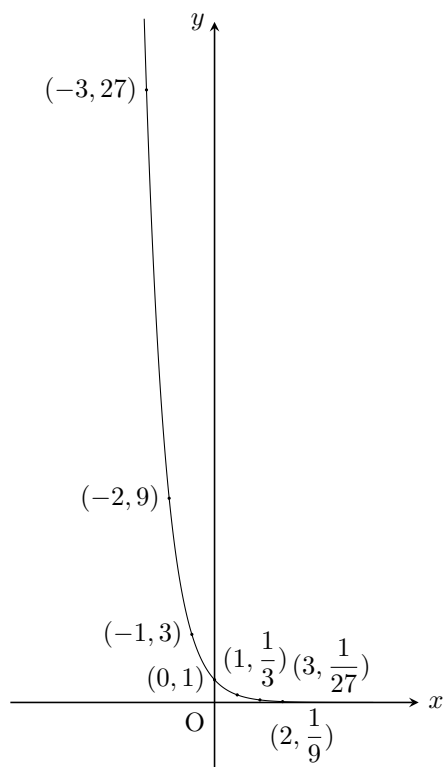
10.2 指数関数のグラフ

⑰ $\frac{1}{16}$, ⑱ 1, ⑲ 16, ⑳ 16, ㉑ 1, ㉒ $\frac{1}{16}$

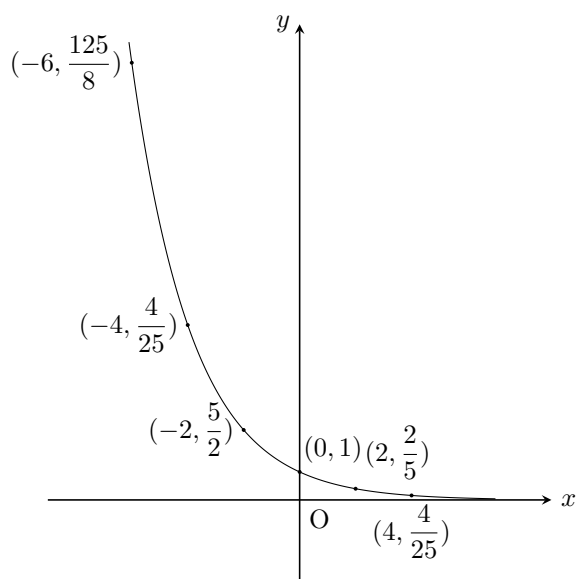
問題 10.7



問題 10.8



問題 10.9



10.3 Excel による演習

問題 10.10

次のように入力すると、

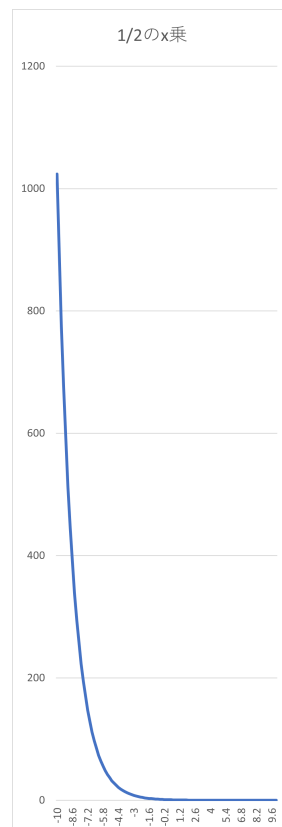
	A	B
1	=19^3	
2	=(1/30)^(-1)	
3	=2009^0	
4	=169^(1/2)	
5	=(1/8)^(-1/3)	
6	=1000^(5/3)	
7	=(8/27)^(-2/3)	
8	=(121^(1/2))^3	
9		
10		

下記のような結果が得られる.

	A	B	C
1	6859		
2	30		
3	1		
4	13		
5	2		
6	100000		
7	2.25		
8	1331		
9			
10			

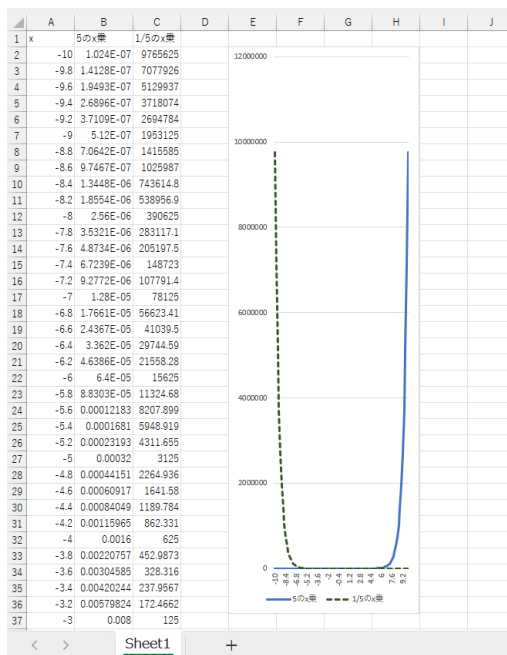
問題 10.11

例題 10.12 のファイルにおいて, セル B1 を「1/2 の x 乗」に入力しなおす. また, セル B2 を「 $=(1/2)^{A2}$ 」に入力しなおし, これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい.

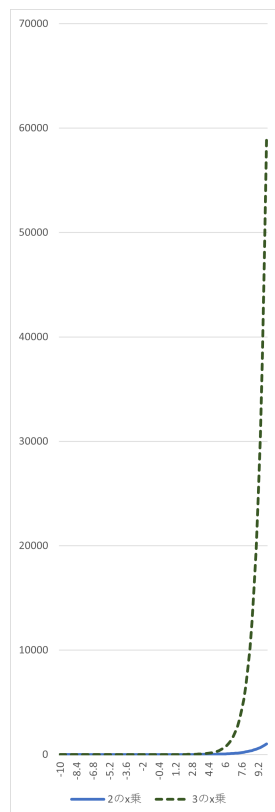


問題 10.12

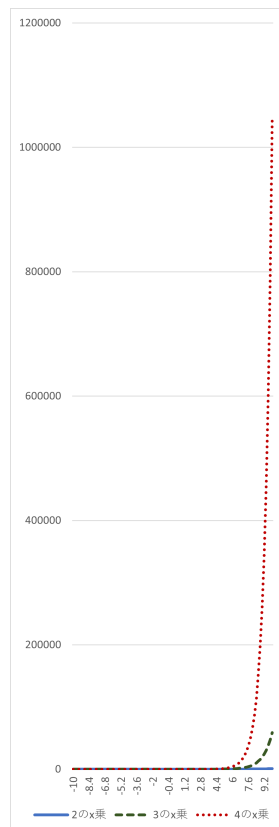
例題 10.13 のファイルにおいて、セル B1 を「5 の x 乗」、セル C1 を「1/5 の x 乗」に入力しなおす。また、セル B2 を「 $=5^{\wedge}A2$ 」、セル C2 を「 $=(1/5)^{\wedge}A2$ 」に入力しなおし、これらを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 10.13



問題 10.14



問題 10.15



第 11 章 対数関数

11.1 対数の意味

- ① 3, ② 4, ③ 3, ④ 2, ⑤ 2, ⑥ 4, ⑦ 5, ⑧ 6, ⑨ 2, ⑩ 10, ⑪ $\log_{10} 3$, ⑫ 3, ⑬ 2, ⑭ $\frac{3}{2}$, ⑮ $\frac{4}{3}$, ⑯ $\frac{4}{3}$,
⑰ 2

問題 11.1

- (1) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ 「 $2^\square = 16$ となるときの□」
 (2) $\log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} \frac{1}{10^2} = \log_{10} 10^{-2} = -2$ 「 $10^\square = \frac{1}{100}$ となるときの□」
 (3) $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ 「 $5^\square = \sqrt{5}$ となるときの□」
 (4) $\log_4 \frac{1}{2} = \log_4 \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \log_4 4^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ 「 $4^\square = \frac{1}{2}$ となるときの□」
 (5) $\log_{\frac{1}{11}} 11 = \log_{\frac{1}{11}} \left(\frac{1}{11}\right)^{-1} = -1$ 「 $\left(\frac{1}{11}\right)^\square = 11$ となるときの□」
 (6) $\log_{\sqrt{8}} 8 = \log_{\sqrt{8}} \sqrt{8}^2 = 2$ 「 $\sqrt{8}^\square = 8$ となるときの□」
 (7) $\log_{100} 1 = \log_{100} 100^0 = 0$ 「 $100^\square = 1$ となるときの□」
 (8) $\log_7 7^{-70} = -70$ 「 $7^\square = 7^{-70}$ となるときの□」

問題 11.2

- (1) $\log_2 \frac{1}{3} + \log_2 24 = \log_2 \left(\frac{1}{3} \times 24\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
 (2) $\log_{100} 50 + \log_{100} 2 = \log_{100} (50 \times 2) = \log_{100} 100 = 1$
 (3) $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$
 (4) $2 \log_2 \sqrt{6} + \log_2 \frac{16}{3} = \log_2 \sqrt{6}^2 + \log_2 \frac{16}{3} = \log_2 6 + \log_2 \frac{16}{3} = \log_2 \left(6 \times \frac{16}{3}\right) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$
 (5) $2 \log_{10} \frac{\sqrt{7}}{100} - \frac{1}{2} \log_{10} 4900 = \log_{10} \left(\frac{\sqrt{7}}{100}\right)^2 - \log_{10} 4900^{\frac{1}{2}} = \log_{10} \frac{7}{10000} - \log_{10} 70$
 $= \log_{10} \frac{7}{10000} = \log_{10} \frac{1}{100000} = \log_{10} \frac{1}{10^5} = \log_{10} 10^{-5} = -5$
 (6) $\log_7 \frac{10}{19} - \log_7 \frac{1}{38} - \log_7 20 = \log_7 \frac{10}{\frac{19}{38}} - \log_7 20 = \log_7 20 - \log_7 20 = 0$
 (7) $2 \log_{\frac{1}{2}} 3 + 2 \log_{\frac{1}{2}} 10 - \log_{\frac{1}{2}} 225 = \log_{\frac{1}{2}} 3^2 + \log_{\frac{1}{2}} 10^2 - \log_{\frac{1}{2}} 225 = \log_{\frac{1}{2}} 9 + \log_{\frac{1}{2}} 100 - \log_{\frac{1}{2}} 225$

$$= \log_{\frac{1}{2}} (9 \times 100) - \log_{\frac{1}{2}} 225 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{900}{225} = \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$$

$$(8) \frac{1}{2} \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 2^{\frac{1}{2}} + \log_3 6^{\frac{1}{2}} - \log_3 2 = \log_3 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt{6} - \log_3 2 \\ = \log_3 (\sqrt{2} \times \sqrt{6}) - \log_3 2 = \log_3 \sqrt{12} - \log_3 2 = \log_3 \frac{\sqrt{12}}{2} = \log_3 \frac{2\sqrt{3}}{2} = \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

問題 11.3

$$(1) \log_{32} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^5} = \frac{3}{5}$$

$$(2) (\log_3 8) \cdot (\log_2 9) = (\log_3 2^3) \cdot \left(\frac{\log_3 9}{\log_3 2}\right) = (3 \times \log_3 2) \cdot \left(\frac{2}{\log_3 2}\right) = 6$$

$$(3) (\log_{10} 2) \cdot (\log_2 5) \cdot (\log_5 10) = (\log_{10} 2) \cdot \left(\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}\right) \cdot \left(\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5}\right) = \log_{10} 10 = 1$$

$$(4) (\log_3 2) \cdot (\log_{16} 3 + \log_8 27) = (\log_3 2) \cdot \left(\frac{\log_3 3}{\log_3 16} + \frac{\log_3 27}{\log_3 8}\right) = (\log_3 2) \cdot \left(\frac{1}{\log_3 2^4} + \frac{3}{\log_3 2^3}\right) \\ = (\log_3 2) \cdot \left(\frac{1}{4 \times \log_3 2} + \frac{3}{3 \times \log_3 2}\right) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

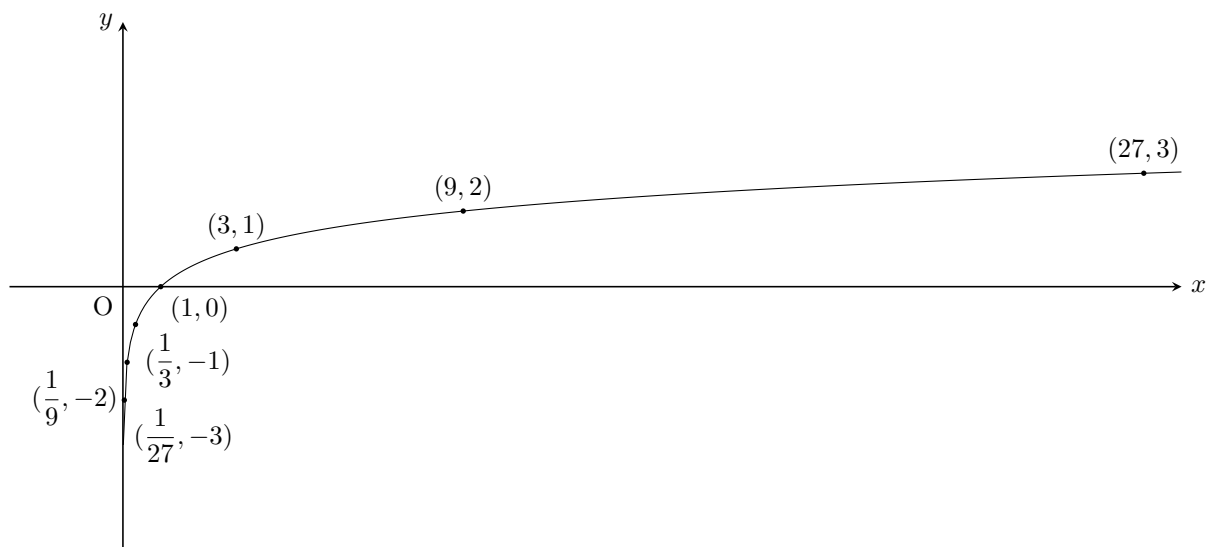
$$(5) \frac{\log_{25} 13}{\log_5 13} = \log_{25} 13 \div \log_5 13 = \frac{\log_5 13}{\log_5 25} \div \log_5 13 = \frac{1}{\log_5 25} = \frac{1}{\log_5 5^2} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \log_3 6 - \log_9 12 = \log_3 6 - \frac{\log_3 12}{\log_3 9} = \log_3 6 - \frac{\log_3 12}{2} = \log_3 6 - \log_3 12^{\frac{1}{2}} = \log_3 6 - \log_3 \sqrt{12} \\ = \log_3 \frac{6}{\sqrt{12}} = \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

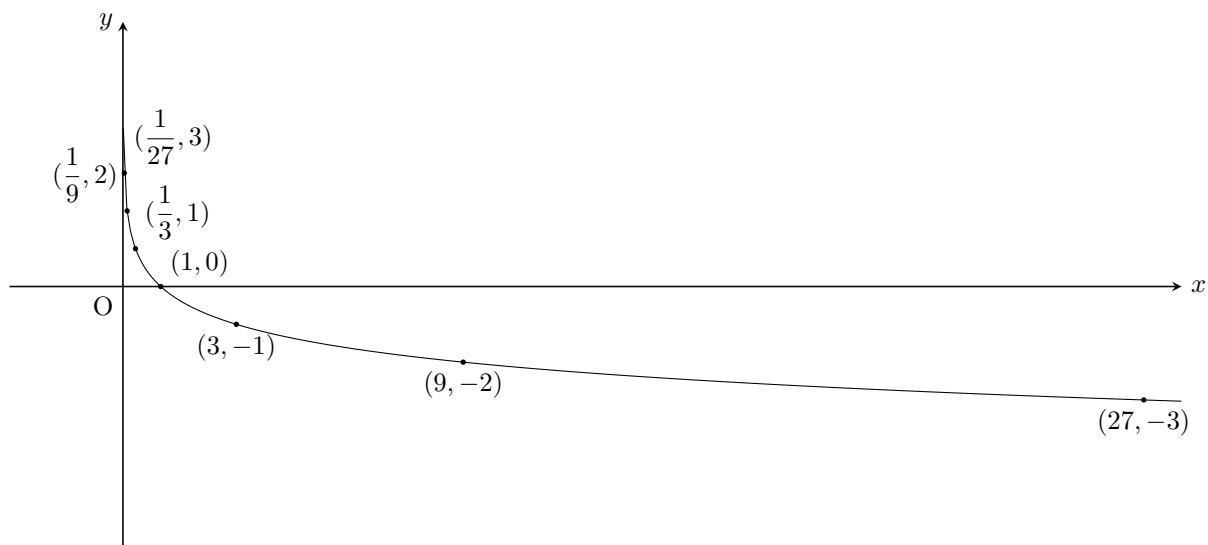
11.2 対数関数のグラフ

⑮ -4, ⑰ 0, ⑳ 4, ㉑ 4, ㉒ 0, ㉓ -4

問題 11.4



問題 11.5



11.3 Excel による演習

問題 11.6

次のように入力すると、

	A	B
1	=LOG(6859,19)	
2	=LOG(30,1/30)	
3	=LOG(1,2009)	
4	=LOG(13,169)	
5	=LOG(2,1/8)	
6	=LOG(100000,1000)	
7	=LOG(2.25,8/27)	
8	=LOG(1331,121)	
9		
10		

下記のような結果が得られる。

	A	B	C
1	3		
2	-1		
3	0		
4	0.5		
5	-0.33333		
6	1.666667		
7	-0.66667		
8	1.5		
9			
10			

ここで、セル A4, A5, A6, A7, A8 の表示形式を「ユーザー定義」にし、種類を「?/?」に変更すると、下記のようになる（ちなみに、表示形式を「分数」にした場合は、帯分数の表示になる）。

	A	B	C
1	3		
2	-1		
3	0		
4	1/2		
5	-1/3		
6	5/3		
7	-2/3		
8	3/2		
9			
10			

セルの書式設定

表示形式 配置 フォント 罫線 塗りつぶし 保護

分類(C):

- 標準
- 数値
- 通貨
- 会計
- 日付
- 時刻
- パーセンテージ
- 分数
- 指数
- 文字列
- その他
- ユーザー定義**

サンプル

1/2

種類(I):

0.00E+00
 #0.00E+0
 # ?/?
 # ??/??
 \$#,##0_);(\$#,##0)
 \$#,##0_);[赤](\$#,##0)
 \$#,##0.00_);(\$#,##0.00)
 \$#,##0.00_);[赤](\$#,##0.00)
 [\$-ja-JP]ge.m.d
 [\$-ja-JP]ggge"年"m"月"d"日"
 yyyy/m/d
 yyyy"年"m"月"d"日"

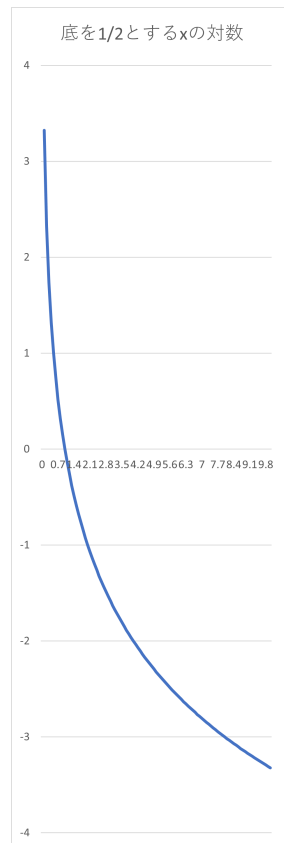
削除(D)

基になる組み込みの表示形式を選択し、新しい表示形式を入力してください。

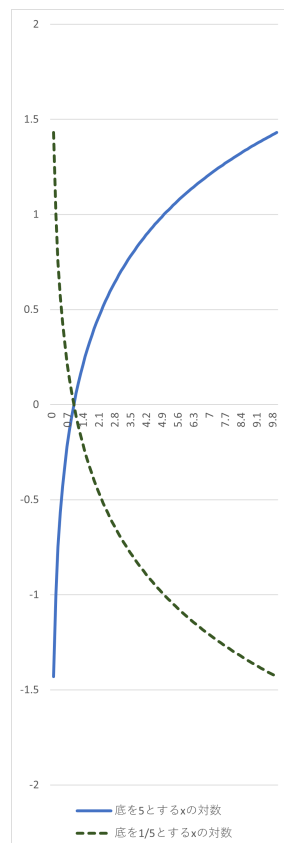
OK キャンセル

問題 11.7

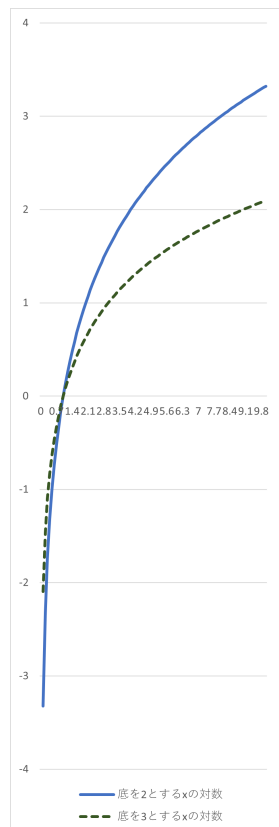
例題 11.9 のファイルにおいて、セル B1 を「底を 1/2 とする x の対数」に入力しなおす。また、セル B3 を「=LOG(A3,1/2)」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



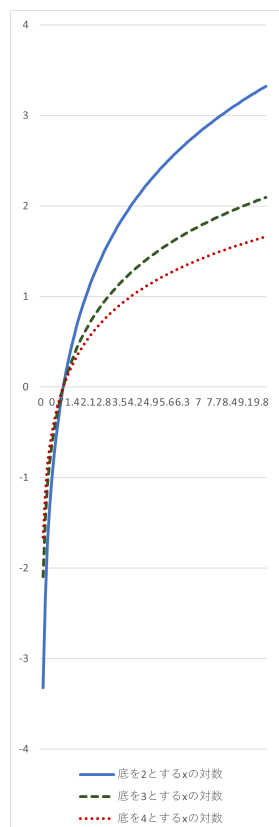
問題 11.8



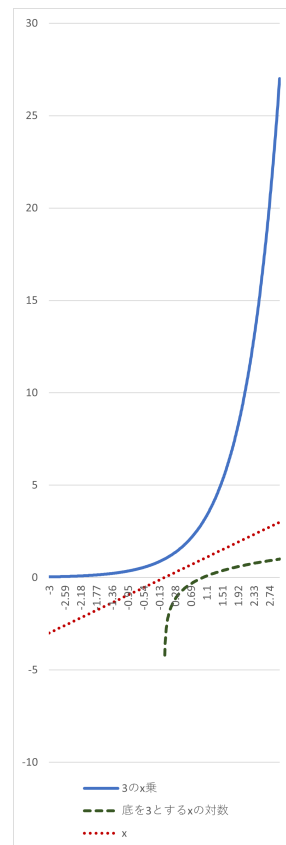
問題 11.9



問題 11.10



問題 11.11



第12章 微分係数

12.1 関数の極限

① $\frac{1}{30}$, ② $\frac{1}{300}$, ③ 60, ④ $2x - 20$, ⑤ 4, ⑥ 0, ⑦ $x^2 - 6x + 12$, ⑧ $x + 1$, ⑨ $\sqrt{x+1} + \sqrt{2}$

問題 12.1

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = \frac{0}{2} = 0$
(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 6) = 0 + 6 = 6$
(3) $\lim_{x \rightarrow 0} 55 = 55$
(4) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - x - 30}{30} = \frac{10^2 - 10 - 30}{30} = 2$
(5) $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 8) = 2 \times 4 - 8 = 0$
(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4)^3 - 64}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 12x^2 + 48x + 64 - 64}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 12x + 48) = 0^2 + 12 \times 0 + 48 = 48$

問題 12.2

(1) -1 (2) -1 (3) 0 (4) 0

問題 12.3

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$
(2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1$
(3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 9x - 22} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+11)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+11} = \frac{1}{13}$
(4) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+5} - 1}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(\sqrt{x+5} - 1)(\sqrt{x+5} + 1)}{(x+4)(\sqrt{x+5} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+5) - 1}{(x+4)(\sqrt{x+5} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{\sqrt{x+5} + 1} = \frac{1}{2}$
(5) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4$
(6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-5x+4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-4)(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{6}$

12.2 関数の傾きと微分の関係

⑩ (3, 6), ⑪ 2, ⑫ (3, 9), ⑬ 4, ⑭ (2, 4), ⑮ 3, ⑯ $(1+h, (1+h)^2)$, ⑰ $2+h$, ⑱ 2, ⑲ $y = 2x - 1$,
⑳ $y = 6x - 9$

問題 12.4

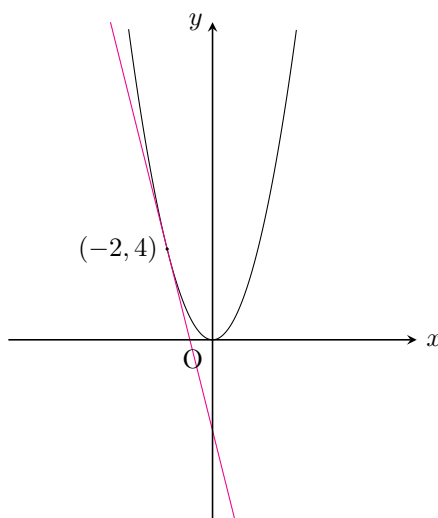
$f(x) = x^2$ とおくと、求める微分係数は

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4$$

と計算される.

問題 12.5

上の問題より、関数 $y = x^2$ の $x = -2$ における微分係数は -4 である. これより、関数 $y = x^2$ の点 $(-2, 4)$ における接線の傾きは -4 であることがわかる. よって、求める接線の式は $y = -4(x - (-2)) + 4$ である. これを整理すると、 $y = -4x - 4$ となる.

**問題 12.6**

$f(x) = x^2 + 3x$ とおくと、求める微分係数は

$$\begin{aligned} f'(10) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(10+h)^2 + 3(10+h) - (10^2 + 3 \times 10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{100 + 20h + h^2 + 30 + 3h - 130}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (23 + h) = 23 \end{aligned}$$

と計算される.

問題 12.7

上の問題より、関数 $y = x^2 + 3x$ の $x = 10$ における微分係数は 23 である. これより、関数 $y = x^2 + 3x$ の点 $(10, 130)$ における接線の傾きは 23 であることがわかる. よって、求める接線の式は $y = 23(x - 10) + 130$ である. これを整理すると、 $y = 23x - 100$ となる.

問題 12.8

$f(x) = 12x + 10$ とおくと、求める微分係数は

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12(a+h) + 10 - (12a + 10)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12a + 12h + 10 - 12a - 10}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 12 = 12 \end{aligned}$$

と計算される.

12.3 Excel による演習

問題 12.9

例題 12.14 のファイルにおいて、セル C2 を「3」に入力しなせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の $x = 3$ における微分係数の近似値 6.1 が、セル E2 に計算される。

問題 12.10

例題 12.14 のファイルにおいて、セル C2 を「-2」に入力しなせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の $x = -2$ における微分係数の近似値 -3.9 が、セル E2 に計算される。

問題 12.11

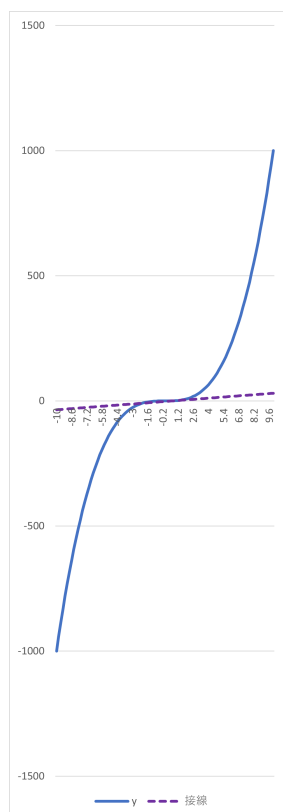
例題 12.15 のファイルにおいて、セル C2 を「5」に入力しなせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の点 (5, 25) における接線のグラフが作成される。

問題 12.12

例題 12.15 のファイルにおいて、セル C2 を「-7」に入力しなせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の点 (-7, 49) における接線のグラフが作成される。

問題 12.13

例題 12.15 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」と書き換え、これを 102 行目まで下にオートフィルする。さらに、セル C2 を「1」、セル D2 を「=C2^3」、セル E2 を「=((C2+0.1)^3-D2)/0.1」に入力しなせばいい。すると、関数 $y = x^3$ の点 (1, 1) における接線のグラフが作成される。



問題 12.14

例題 12.16 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルする。さらに、セル D2 を「=C2^3」、セル E2 を「=((C2+0.1)^3-D2)/0.1」に入力しなおせばいい。

または、問題 12.13 のファイルにおいて、スピンボタンを挿入してもいい。

問題 12.15

問題 12.14 のファイルにおいて、スピンボタンを右クリックし、「コントロールの書式設定」を選択する。「コントロールの書式設定」ダイアログボックスが出てくるので、「リンクするセル」を入力するところにカーソルをおいて、セル C3 をクリックして指定しなおす。さらに、最大値を「20」に変更してから OK ボタンを押す。

つぎに、セル C2 を「=-10+C3」と入力しなおす。

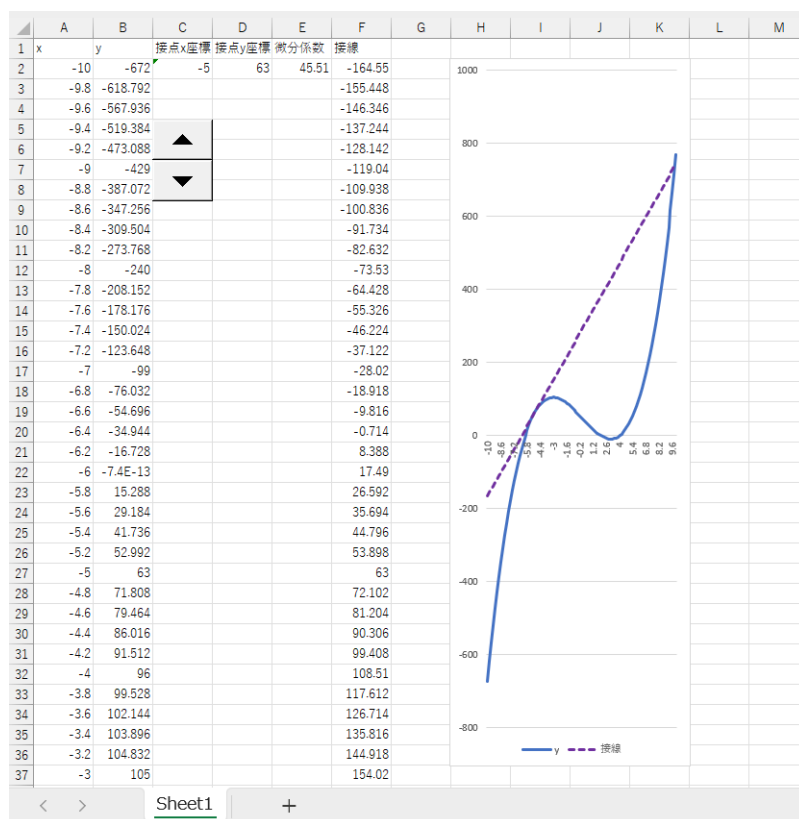
すると、スピンボタンをクリックするとセル C3 の値が 0, 1, 2, ..., 20 に変化し、それとともに、セル C2 の値が -10, -9, -8, ..., 10 に変化することが確認できる。

セル C3 のフォントの色は白にし、任意の値にして保存する。

または、例題 12.17 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」に入力しなおしてこれを 102 行目まで下にオートフィルし、さらに、セル D2 を「=C2^3」、セル E2 を「=((C2+0.1)^3-D2)/0.1」に入力しなおしてもいい。

問題 12.16

例題 12.17 または問題 12.15 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3-28*A2+48」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルする。さらに、セル D2 を「=C2^3-28*C2+48」、セル E2 を「=((C2+0.1)^3-28*(C2+0.1)+48-D2)/0.1」に入力しなおせばいい。



第 13 章 1 変数関数の微分法

13.1 導関数

① $2x$, ② $(2 \times 3) = 6$, ③ $(2 \times (-2)) = -4$, ④ $-\frac{1}{x^2}$, ⑤ $\left(-\frac{1}{(-10)^2}\right) = -\frac{1}{100}$, ⑥ 11 , ⑦ 0

問題 13.1

求める導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

と計算される.

以上より, $f'(x) = 3x^2$ となるので, $f'(-3) = 3 \times (-3)^2 = 27$, $f'(10) = 3 \times (10)^2 = 300$ となることがわかる.

問題 13.2

求める微分係数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

と計算される.

問題 13.3

求める導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} = a$$

と計算される.

問題 13.4

求める導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

と計算される.

問題 13.5

$$(1) f'(x) = 8x^{(8-1)} = 8x^7$$

$$(2) f'(x) = (-3)x^{(-3-1)} = -3x^{-4}$$

$$(3) f(x) = x^{\frac{1}{3}} \text{ より, } f'(x) = \frac{1}{3}x^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad \left(= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

$$(4) f'(x) = 0$$

$$(5) f'(x) = \frac{3}{10} \times 10x^{(10-1)} = 3x^9$$

$$(6) f'(x) = 5x^{(5-1)} + 4x^{(4-1)} + 3x^{(3-1)} + 2x^{(2-1)} + 1 + 0 = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(7) f'(x) = 6 \times 5x^{(5-1)} - \frac{1}{3} \times 3x^{(3-1)} + 9 = 30x^4 - x^2 + 9$$

$$(8) f(x) = 2x^{-4} + x^{-2} - 2x^{-\frac{1}{2}} - 1 \text{ より, } f'(x) = 2 \times (-4)x^{(-4-1)} + (-2)x^{(-2-1)} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x^{(-\frac{1}{2}-1)} - 0 \\ = -8x^{-5} - 2x^{-3} + x^{-\frac{3}{2}} \quad \left(= -\frac{8}{x^5} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

$$(9) f'(x) = 1 - 3 \times \frac{4}{5}x^{\left(\frac{4}{5}-1\right)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}x^{\left(\frac{1}{5}-1\right)} + \left(-\frac{3}{5}\right)x^{\left(-\frac{3}{5}-1\right)} + 0 = 1 - \frac{12}{5}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{10}x^{-\frac{4}{5}} - \frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}}$$

13.2 関数の増減とグラフ

- ⑧ $3x^2 - 6x$ ⑨ 0 , ⑩ -4 , ⑪ 正, ⑫ $(3, 0)$, ⑬ $\frac{x^2}{2} - 2x + 2$, ⑭ 0 , ⑮ $\frac{4}{3}$, ⑯ $(0, 0)$,
⑰ $(1, 3)$, ⑱ $(-1, -3)$ (⑰と⑱は逆でもいい)

問題 13.6

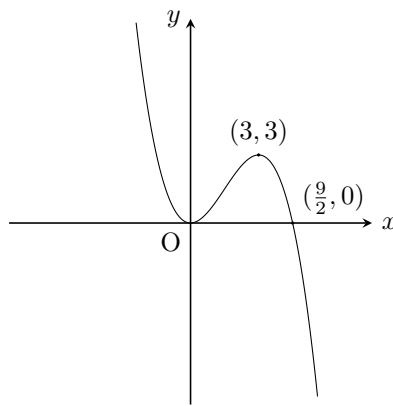
3 次関数 $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2$ について、微分すると、 $f'(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$ となる。これは、 $f'(x) = -\frac{2}{3}x(x-3)$ と変形できる。よって、 $x = 0$ または $x = 3$ のときに $f'(x)$ は 0 になる。

- $x < 0$ であるような x については $f'(x) < 0$ (接線の傾きが負) であり、 $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2$ は減少する。
- $x = 0$ であるときは、 $f'(0) = 0$ (接線の傾きが 0) である。また、 $f(0) = -\frac{2}{9} \times 0^3 + 0^2 = 0$ である。
- $0 < x < 3$ であるような x については $f'(x) > 0$ (接線の傾きが正) であり、 $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2$ は増加する。
- $x = 3$ であるときは、 $f'(3) = 0$ (接線の傾きが 0) である。また、 $f(3) = -\frac{2}{9} \times 3^3 + 3^2 = 3$ である。
- $x > 3$ であるような x については $f'(x) < 0$ (接線の傾きが負) であり、 $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2$ は減少する。

このことを増減表にまとめる。

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow	3	\searrow

以上より、グラフは下記ようになる。



ここで、 $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2$ について、 $f(x) = 0$ となるような 0 以外の x を求めると、 $-\frac{2}{9}x^3 + x^2 = 0$ より、 $-2x^3 + 9x^2 = 0$ 、つまり、 $-x^2(2x - 9) = 0$ となるので、 $x = \frac{9}{2}$ となる。よって、グラフは点 $(\frac{9}{2}, 0)$ を通ることがわかる。

問題 13.7

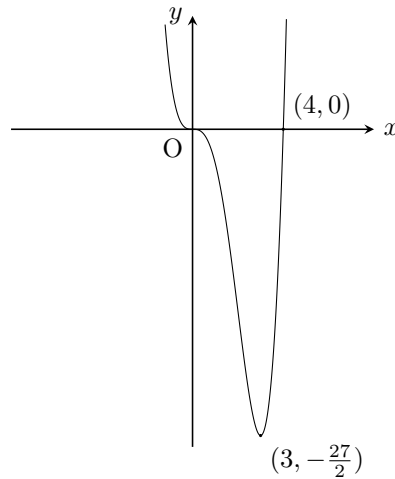
4 次関数 $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3$ について、微分すると、 $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ となる。これは、 $f'(x) = 2x^2(x - 3)$ と変形できる。よって、 $x = 0$ または $x = 3$ のときに $f'(x)$ は 0 になる。

- $x < 0$ であるような x については $f'(x) < 0$ (接線の傾きが負) であり、 $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3$ は減少する。
- $x = 0$ であるときは、 $f'(0) = 0$ (接線の傾きが 0) である。また、 $f(0) = \frac{0^4}{2} - 2 \times 0^3 = 0$ である。
- $0 < x < 3$ であるような x についても $f'(x) < 0$ (接線の傾きが負) であり、 $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3$ は減少する。
- $x = 3$ であるときは、 $f'(3) = 0$ (接線の傾きが 0) である。また、 $f(3) = \frac{3^4}{2} - 2 \times 3^3 = -\frac{27}{2}$ である。
- $x > 3$ であるような x については $f'(x) > 0$ (接線の傾きが正) であり、 $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3$ は増加する。

このことを増減表にまとめる。

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	0	\searrow	$-\frac{27}{2}$	\nearrow

以上より、グラフは下記のようなになる。



ここで、 $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3$ について、 $f(x) = 0$ となるような 0 以外の x を求めると、 $\frac{x^4}{2} - 2x^3 = 0$ より、 $x^4 - 4x^3 = 0$ 、つまり、 $x^3(x - 4) = 0$ となるので、 $x = 4$ となる。よって、グラフは点 $(4, 0)$ を通ることがわかる。

13.3 Excel による演習

問題 13.8

例題 13.10 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 13.9

例題 13.10 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^4」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 13.10

例題 13.10 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^5」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 13.11

例題 13.10 のファイルにおいて、セル B2 を「=1/4*A2^4-A2^2」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 13.12

例題 13.11 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^(-2)」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルする。

$x = 0$ のときの y の値は存在しないので、セル B102 の値を消去する。

問題 13.13

例題 13.11 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^(-3)」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルする。

$x = 0$ のときの y の値は存在しないので、セル B102 の値を消去する。

問題 13.14

例題 13.12 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^(1/3)」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 13.15

例題 13.12 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^(1/4)」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

第 14 章 1 変数関数の積分法

14.1 不定積分

$$\textcircled{1} 2x, \textcircled{2} 3x^2, \textcircled{3} x^4 + C, \textcircled{4} x^2, \textcircled{5} \frac{1}{4}x^4, \textcircled{6} \frac{1}{2}x^6 - 5x^{-1} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$

問題 14.1

計算がおわったら、結果を微分して検算してみよう.

$$(1) \int 5x^4 dx = x^5 + C \quad (\text{実際, } (x^5 + C)' = 5x^4 \text{ となることがたしかめられる})$$

$$(2) \int 6x^5 dx = x^6 + C \quad (\text{実際, } (x^6 + C)' = 6x^5 \text{ となることがたしかめられる})$$

$$(3) \int x^4 dx = \frac{1}{4+1}x^{(4+1)} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

$$(4) \int x^{-6} dx = \frac{1}{-6+1}x^{(-6+1)} + C = \frac{1}{-5}x^{-5} + C = -\frac{1}{5}x^{-5} + C$$

$$(5) \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{(\frac{1}{4}+1)} + C = \frac{1}{\frac{5}{4}}x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$$

$$(6) \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{(-\frac{2}{3}+1)} + C = \frac{1}{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + C = 3x^{\frac{1}{3}} + C$$

問題 14.2

計算がおわったら、結果を微分して検算してみよう.

$$(1) \int -\frac{5}{x^3} dx = -5 \int x^{-3} dx = -5 \times \frac{1}{-3+1}x^{(-3+1)} + C = -5 \times \frac{1}{-2}x^{-2} + C = \frac{5}{2}x^{-2} + C \\ \left(= \frac{5}{2x^2} + C \right)$$

$$(2) \int \frac{3\sqrt{x}}{2} dx = \frac{3}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{(\frac{1}{2}+1)} + C = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = x^{\frac{3}{2}} + C \\ (= x\sqrt{x} + C)$$

$$(3) \int (1 + x^2 + x^3) dx = x + \frac{1}{2+1}x^{(2+1)} + \frac{1}{3+1}x^{(3+1)} + C = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

$$(4) \int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = 3 \int x^{-2} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \times \frac{1}{-2+1}x^{(-2+1)} - 2 \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{(-\frac{1}{2}+1)} + C \\ = 3 \times \frac{1}{-1}x^{-1} - 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = -3x^{-1} - 4x^{\frac{1}{2}} + C \\ \left(= -\frac{3}{x} - 4\sqrt{x} + C \right)$$

$$(5) \int (x^{-4} - x^{-\frac{1}{4}}) dx = \frac{1}{-4+1}x^{(-4+1)} - \frac{1}{-\frac{1}{4}+1}x^{(-\frac{1}{4}+1)} + C = \frac{1}{-3}x^{-3} - \frac{1}{\frac{3}{4}}x^{\frac{3}{4}} + C \\ = -\frac{1}{3}x^{-3} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$$

$$\begin{aligned}
(6) \int \left(\frac{2}{x^5} + \frac{7}{x^8} \right) dx &= 2 \int x^{-5} dx + 7 \int x^{-8} dx = 2 \times \frac{1}{-5+1} x^{(-5+1)} + 7 \times \frac{1}{-8+1} x^{(-8+1)} + C \\
&= 2 \times \frac{1}{-4} x^{-4} + 7 \times \frac{1}{-7} x^{-7} + C = -\frac{1}{2} x^{-4} - x^{-7} + C \\
&\left(= -\frac{1}{2x^4} - \frac{1}{x^7} + C \right)
\end{aligned}$$

14.2 積分と面積の関係

$$\textcircled{7} 50, \textcircled{8} \frac{25}{2}, \textcircled{9} \frac{x^2}{2}$$

問題 14.3

たとえば, $F(x) = \frac{x^3}{9}$ は $f(x) = \frac{x^2}{3}$ の原始関数のひとつなので,

$$\int_0^6 f(x) dx = F(6) - F(0) = \frac{6^3}{9} - \frac{0^3}{9} = 24$$

となる.

問題 14.4

たとえば, $F(t) = \frac{t^3}{9}$ は $f(t) = \frac{t^2}{3}$ の原始関数のひとつなので,

$$\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = \frac{x^3}{9} - \frac{0^3}{9} = \frac{x^3}{9}$$

となる.

14.3 定積分

$$\textcircled{10} (7+19=) 26, \textcircled{11} (3^3-1^3=) 26, \textcircled{12} (1^3-3^3=) -26, \textcircled{13} (1^3-1^3=) 0$$

問題 14.5

$$\begin{aligned}
(1) \int_{-2}^2 (3x - x^3) dx &= \left[3 \times \frac{1}{1+1} x^{(1+1)} - \frac{1}{3+1} x^{(3+1)} \right]_{-2}^2 = \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{-2}^2 \\
&= \frac{3}{2} \times 2^2 - \frac{1}{4} \times 2^4 - \left(\frac{3}{2} \times (-2)^2 - \frac{1}{4} \times (-2)^4 \right) = 6 - 4 - (6 - 4) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int_4^2 \frac{12}{x^4} dx &= \int_4^2 12x^{-4} dx = \left[\frac{12}{-4+1} x^{(-4+1)} \right]_4^2 = -4 \times \left[\frac{1}{x^3} \right]_4^2 = -4 \times \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} \right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = -\frac{7}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \int_1^9 \left(15\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int_1^9 (15x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}) dx = \left[\frac{15}{\frac{1}{2}+1} x^{(\frac{1}{2}+1)} + \frac{3}{-\frac{1}{2}+1} x^{(-\frac{1}{2}+1)} \right]_1^9 \\
&= \left[\frac{15}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \right]_1^9 = \left[10x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} \right]_1^9 = 10 \times 9^{\frac{3}{2}} + 6 \times 9^{\frac{1}{2}} - \left(10 \times 1^{\frac{3}{2}} + 6 \times 1^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= 270 + 18 - (10 + 6) = 272
\end{aligned}$$

14.4 Excel による演習

問題 14.6

例題 14.8 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^2」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 14.7

例題 14.8 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 14.8

例題 14.8 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^4」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 14.9

例題 14.8 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^(1/2)」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 14.10

例題 14.8 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^(1/3)」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

問題 14.11

例題 14.8 のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^(1/4)」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

第 15 章 まとめの演習

問題 15.1

$$\frac{{}_5P_3 \times {}_5C_3}{5!} = \frac{(5 \times 4 \times 3) \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{2} = 5$$

問題 15.2

3 けたの整数なので、百の位は 0 以外、つまり、1, 2, 3, 4, 5 の 5 通りのどれかでなければならない。

百の位が 1 のとき、十の位は 0, 2, 3, 4, 5 の 5 通りのどれかである。百の位がほかの場合でも、十の位の選び方は 5 通りであることは同様である。そして、もし十の位を 0 とすると、一の位は 2, 3, 4, 5 の 4 通りのどれかである。十の位がほかの場合でも、一の位の選び方は 4 通りであることは同様である。

よって、十の位の候補 5 つに対して、一の位の選び方は 4 通りずつあるので、この部分全部で、 5×4 通りあるということになる。

その 5×4 通りがさらに、百の位の候補 5 つに対して、それぞれ同様に考えられるので、全体で、 $5 \times 5 \times 4$ 通り、つまり、100 通りあることがわかる。

問題 15.3

$$(a+b)^5 = {}_5C_0 a^5 + {}_5C_1 a^4 b + {}_5C_2 a^3 b^2 + {}_5C_3 a^2 b^3 + {}_5C_4 a b^4 + {}_5C_5 b^5$$

とあらわすことができる。ここで、

$${}_5C_0 = {}_5C_5 = 1, \quad {}_5C_1 = {}_5C_4 = \frac{{}_5P_1}{1!} = \frac{5}{1} = 5, \quad {}_5C_2 = {}_5C_3 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

なので、

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

となることがわかる。

問題 15.4

$${}_6C_3 = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

より、20 通りである。

問題 15.5

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(2) $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

(3) $C = \{2, -2\}$

(4) $D = \{5, 6\}$ ($x^2 - 11x + 30 = 0$ は $(x-5)(x-6) = 0$ と変形できるので)

問題 15.6

A の部分集合は次の 8 つの集合である.

$$\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{3, 6\}, \{6, 9\}, \{3, 9\}, \{3, 6, 9\}$$

問題 15.7

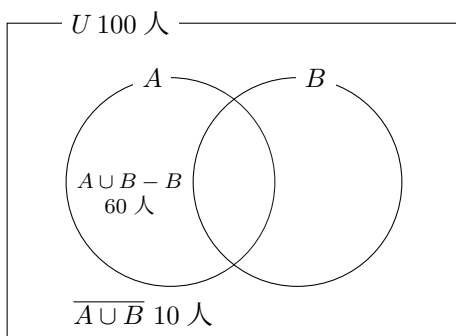
- (1) $A \cap B = \{0, 2, 4\}$
- (2) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$
- (3) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- (4) $\overline{B \cup C} = \overline{\{0, 1, 2, 3, 4, 8\}} = \{5, 6, 7, 9, 10\}$
- (5) $\overline{B} \cap \overline{C} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\} = \{5, 6, 7, 9, 10\}$
- (6) $A - B = \{6, 8, 10\}$
- (7) $B - A = \{1, 3\}$
- (8) $A \cup C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} (= A)$
- (9) $\overline{A} \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{0, 4, 8\} = \emptyset$
- (10) $\overline{C - A} = \overline{\emptyset} = U (= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$

問題 15.8

全体集合 U を対象の 100 人の学生からなる集合, 集合 A を試験 A に合格した学生からなる集合, 集合 B を試験 B に合格した学生からなる集合とする. このとき,

$$|U| = 100, \quad |A \cup B - B| = 60, \quad |\overline{A \cup B}| = 10$$

ということになる.



よって,

- (1) 少なくともどちらかの試験に合格した人数は, $|A \cup B| = |U| - |\overline{A \cup B}| = 100 - 10 = 90$
- (2) 試験 B に合格した人数は, $|B| = |A \cup B| - |A \cup B - B| = 90 - 10 = 80$

であることがわかる.

問題 15.9

さいころを振ったときに5以下の目が出る確率は

$$\frac{\text{5以下の目が出る場合の数}}{\text{出る目についてのすべての場合の数}}$$

により求められる。出る目についてのすべての場合は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ なので6通りあり、5以下の目が出る場合は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ なので5通りである。よって、求める確率は $5/6$ であることがわかる。

[別解] さいころを振ったときに「5以下の目が出ること」は「6の目が出ること」の余事象なので、

$$\text{「5以下の目が出る確率」} = 1 - \text{「6の目が出る確率 (1/6)」}$$

と計算して、「5以下の目が出る確率 $5/6$ 」を求めてもいい。

問題 15.10

出る目についてのすべての場合は

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \dots, (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

なので、 6×6 より36通りあり、出る目の数の和が5以下になる場合は

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

なので、10通りある。よって、求める確率は $(10/36) = 5/18$ であることがわかる。

問題 15.11

さいころを2回振ったときに「出る目の数の和が6以上になること」は「出る目の数の和が5以下になること」の余事象なので、

$$\text{「出る目の数の和が6以上になる確率」} = 1 - \text{「出る目の数の和が5以下になる確率 (5/18)」}$$

と計算して求めることができる。よって、求める「出る目の数の和が6以上になる確率」は $13/18$ である。

問題 15.12

赤玉4個、白玉1個の合計5個入っている袋から同時に玉を2個取り出して順番に並べるとすると、取り出す2個の玉についてのすべての場合は ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$ なので、20通りある。

どちらも赤玉である場合は ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ なので、12通りある。

また、赤玉と白玉の1つずつになる場合は

$$\{(\text{赤1}, \text{白}), (\text{赤2}, \text{白}), (\text{赤3}, \text{白}), (\text{赤4}, \text{白}), (\text{白}, \text{赤1}), (\text{白}, \text{赤2}), (\text{白}, \text{赤3}), (\text{白}, \text{赤4})\}$$

なので、8通りある。

よって、どちらも赤玉である確率は $\frac{12}{20}$ つまり $\frac{3}{5}$ となり、赤玉と白玉の1つずつになる確率は $\frac{8}{20}$ つまり $\frac{2}{5}$ となる。

[別解] 下記のように、2個取り出してからそれらを並べる順番を考慮しないとして計算してもいい。

取り出す2個の玉についてのすべての場合を ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$ から10通りとする。

どちらも赤玉である場合を ${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$ から6通りとする。

また、赤玉と白玉の1つずつになる場合を $\{\{\text{赤1}, \text{白}\}, \{\text{赤2}, \text{白}\}, \{\text{赤3}, \text{白}\}, \{\text{赤4}, \text{白}\}\}$ から4通りとする。

そうすると、どちらも赤玉である確率は $\frac{6}{10}$ つまり $\frac{3}{5}$ となり、赤玉と白玉の 1 つずつになる確率は $\frac{4}{10}$ つまり $\frac{2}{5}$ となる。

問題 15.13

1 以外の目が出たことは確定しているので、 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ の 5 通りのなかでの 3 以上の目が出る割合を考えればよい。3 以上の目の出る場合は $\{3, 4, 5, 6\}$ の 4 通りだけなので、求める確率は $4/5$ であることがわかる。

問題 15.14

クラス全員の点数の合計を平均点でわれば、クラスの人数がわかる。

$$\frac{1145}{57.25} = 20$$

より、20 人であることがわかる。

また、一番大きい点数を除いた 19 名のテストの合計は 55×19 より 1045 点である。

よって、一番大きい点数は $1145 - 1045$ より 100 点である。

問題 15.15

速さ 60 km/時 で 1 時間移動したとき進む距離は 60 km である。また、速さ 40 km/時 で 1 時間移動したとき進む距離は 40 km である。

よって、平均の速さは

$$\frac{60 + 40}{1 + 1} = 50 \text{ (km/時)} \quad \left(\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} \right)$$

と計算され、50 km/時 となることがわかる。

問題 15.16

まず、片道の距離を x km とすると、往復の距離は

$$x \times 2 = 2x \text{ (km)}$$

である。また、往復でかかる時間は

$$\left(\frac{x}{60} + \frac{x}{40} \right) \text{ 時間} \quad \left(\text{時間} = \frac{\text{距離}}{\text{速さ}} \right)$$

である。よって、往復での平均の速さは

$$\frac{2x}{\frac{x}{60} + \frac{x}{40}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = 48 \text{ (km/時)} \quad \left(\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} \right)$$

と計算され、48 km/時 となることがわかる。

なお、この「48」というのは、60 と 40 のそれぞれの逆数の相加平均値 $\frac{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}}{2}$ の逆数 $\frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}}$ を求めている。つまり、60 と 40 の調和平均値を求めているのである。

問題 15.17

平均値は

$$\frac{46 + 89 + 46 + 90 + 93 + 46 + 59 + 83}{8} = \frac{552}{8} = 69$$

より、69 となる。

つぎに、データを小さい順に並べると、

46, 46, 46, 59, 83, 89, 90, 93,

となる。データは全部で 8 個あるので、中央値は「4 (= 8/2) 番目に小さい値、と 5 (= 8/2+1) 番目に小さい値の平均値」であり、

$$\frac{59 + 83}{2} = 71$$

より、71 であることがわかる。

また、一番多くあらわれるデータは「46」であることがわかる (3 回あらわれる)。よって、最頻値は 46 である。

問題 15.18

まず、平均値を求めると、

$$\frac{8 + 10 + 4 + 7 + 5 + 8}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

より、7 であることがわかる。よって、偏差は

8 - 7, 10 - 7, 4 - 7, 7 - 7, 5 - 7, 8 - 7

つまり、1, 3, -3, 0, -2, 1 となる。これより、分散は、

$$\frac{1^2 + 3^2 + (-3)^2 + 0^2 + (-2)^2 + 1^2}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

と計算され、4 であることがわかる。標準偏差は、 $\sqrt{4} = 2$ より 2 となる。

問題 15.19

まず、平均値を求めると、

$$\frac{-7 - 4 + 1 - 6 + 3 + 0 - 8}{7} = \frac{-21}{7} = -3$$

より、-3 であることがわかる。よって、偏差は

-7 - (-3), -4 - (-3), 1 - (-3), -6 - (-3), 3 - (-3), 0 - (-3), -8 - (-3)

つまり、-4, -1, 4, -3, 6, 3, -5 となる。これより、分散は、

$$\frac{(-4)^2 + (-1)^2 + 4^2 + (-3)^2 + 6^2 + 3^2 + (-5)^2}{7} = \frac{112}{7} = 16$$

と計算され、16 であることがわかる。標準偏差は、 $\sqrt{16} = 4$ より 4 となる。

問題 15.20

標準偏差が $\frac{1}{100}$ のとき分散は

$$\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$$

より、 $\frac{1}{10000}$ となる。また、分散が 1 のとき標準偏差は

$$\sqrt{1} = 1$$

より, 1 となる.

問題 15.21

まずは, 平均点を計算してみると, 計算テストについては

$$\frac{7+4+5+1+3}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

より, 4 点となり, 漢字テストについては

$$\frac{4+6+8+10+7}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

より, 7 点となる.

これより, A, B, C, D, E の順にそれぞれ偏差を計算すると, 計算テストの点数については

$$7-4, 4-4, 5-4, 1-4, 3-4$$

つまり, 3, 0, 1, -3, -1 となり, 漢字テストの点数については

$$4-7, 6-7, 8-7, 10-7, 7-7$$

つまり, -3, -1, 1, 3, 0 となることがわかる.

問題 15.22

A, B, C, D, E のそれぞれについて, 「計算テストの偏差 × 漢字テストの偏差」の値を順に計算すると,

$$3 \times (-3), 0 \times (-1), 1 \times 1, (-3) \times 3, (-1) \times 0$$

つまり, -9, 0, 1, -9, 0 となる.

問題 15.23

中間テストの点数と期末テストの点数の共分散は, A, B, C, D, E のそれぞれについての「中間テストの偏差 × 期末テストの偏差」の平均値である.

$$\frac{-9+0+1-9+0}{5} = \frac{-17}{5} = -3.4$$

より, 求める共分散は -3.4 であることがわかる.

問題 15.24

問題 15.21 より, A, B, C, D, E の順にそれぞれ偏差を計算すると, 計算テストの点数については

$$3, 0, 1, -3, -1$$

となり, 漢字テストの点数については

$$-3, -1, 1, 3, 0$$

となることがわかっている. よって, A, B, C, D, E の順にそれぞれ偏差の 2 乗を計算すると, 計算テストの点数については

$$9, 0, 1, 9, 1$$

となり、漢字テストの点数については

$$9, 1, 1, 9, 0$$

となる。ゆえに、分散（偏差²の平均値）を計算すると、計算テストの点数については

$$\frac{9+0+1+9+1}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

より、4となる。漢字テストの点数については

$$\frac{9+1+1+9+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

より、4となる。よって、計算テストの点数の標準偏差は

$$\sqrt{4} = 2$$

より、2となる。漢字テストの点数の標準偏差は

$$\sqrt{4} = 2$$

より、2となることがわかる。

問題 15.25

問題 15.24 より、計算テストの点数の標準偏差も漢字テストについての標準偏差も 2 である。また、問題 15.23 より、計算テストの点数と漢字テストの点数の共分散は -3.4 であることがわかっている。よって、

$$\text{相関係数} = \frac{\text{共分散}}{\text{片方の標準偏差} \times \text{もう片方の標準偏差}} = \frac{-3.4}{2 \times 2} = -0.85$$

となり、求める相関係数は -0.85 であることがわかる。

問題 15.26

$$\begin{aligned} (1) \quad (11a+15b) - (7a+11b) &= 11a-7a+15b-11b = 4a+4b = 4(a+b) = 4 \left(\begin{pmatrix} 34 \\ -35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -56 \\ 65 \end{pmatrix} \right) = 4 \begin{pmatrix} -22 \\ 30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -88 \\ 120 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \quad -4(a-b) - (-4a-6b) = -4a+4b+4a+6b = 10b = 10 \begin{pmatrix} -56 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -560 \\ 650 \end{pmatrix}$$

問題 15.27

$$(1) \quad 8 \times (-10) + (-6) \times 8 = -128$$

$$(2) \quad 2/11 \times 3/11 + 5/11 \times 7/11 = 41/121$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \times 2 + 3 \times 2 + 1 \times 7 = 23$$

$$(4) \quad 3 \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot (-1) \left(\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 3 \begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot (-1) \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix} = (-9) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1) \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$= ((-9) \times (-1))(10 \times 10 + 10 \times (-10) + 1 \times (-9)) = 9 \times (-9) = -81$$

問題 15.28

$$(1) -10 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot (-10) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = (-10 \times (-10))(-\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) + \sqrt{2} \times \sqrt{2}) = (-10 \times (-10)) \times 4 \text{ である.}$$

よって, $-10 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ の大きさは, $\sqrt{(-10 \times (-10)) \times 4} = 10 \times 2 = 20$ より, 20 であることがわかる.

$$(2) \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \right) (7 \times 7 + 11 \times 11 + (-3) \times (-3)) = \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \right) \times 179 \text{ である.}$$

よって, $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$ の大きさは, $\sqrt{\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times 179} = \frac{1}{12} \times \sqrt{179}$ より, $\frac{\sqrt{179}}{12}$ であることがわかる.

$$(3) \begin{pmatrix} 55 \\ -33 \\ 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 55 \\ -33 \\ 110 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{11} \times \frac{1}{11} \right) (5 \times 5 + (-3) \times (-3) + 10 \times 10) = \left(\frac{1}{11} \times \frac{1}{11} \right) \times 134$$

である.

よって, $\begin{pmatrix} 55 \\ -33 \\ 110 \end{pmatrix}$ の大きさは, $\sqrt{\left(\frac{1}{11} \times \frac{1}{11} \right) \times 134} = \frac{1}{11} \times \sqrt{134}$ より, $\frac{\sqrt{134}}{11}$ であることがわかる.

$$(4) \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -30 \\ -24 \\ -27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 29 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ となる.}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 14$ なので, $\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -30 \\ -24 \\ -27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 29 \end{pmatrix} \right)$ の大きさは $\sqrt{14}$ であることがわかる.

問題 15.29

$$(1) \begin{pmatrix} 23 & -20 \\ -27 & -5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -29 & 11 \\ 20 & -7 \\ -16 & 6 \end{pmatrix} \quad (3) \text{ 積は定義されない} \quad (4) \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 86 & -34 \\ -49 & 18 \end{pmatrix}$$

問題 15.30

$$(1) \begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 \\ 8 & -10 & 12 \\ -12 & 15 & -18 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -10 & 5 & -10 \\ 20 & -10 & 20 \\ -30 & 15 & -30 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -10 & 5 & -10 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} -32 \end{pmatrix}$$

(5) 積は定義されない (6) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

問題 15.31

たとえば,

$$(A, B) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad (A, B) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

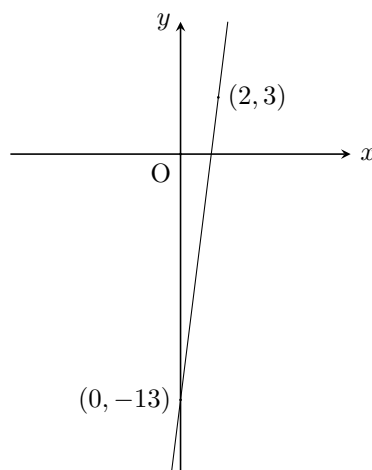
$$(A, B) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

問題 15.32

求める 1 次関数を $y = ax + b$ とおく. 直線は点 $(2, 3)$ を通るので, $x = 2$ のとき $y = 3$ である. これを代入すると, $3 = 2a + b$ となるので, $b = -2a + 3$ となる. また, 直線は点 $(-1, -21)$ も通るので, $x = -1$ のとき $y = -21$ である. これを代入すると, $-21 = -a + b$ となる. $b = -2a + 3$ を代入すると, $-21 = -a - 2a + 3$ となるので, $a = 8$ であることがわかる. これより, $b = -2 \times 8 + 3 = -13$ であることもわかる.

つまり, 求める 1 次関数は $y = 8x - 13$ である.

直線は点 $(2, 3)$, 点 $(0, -13)$ を通ることから, グラフは下記のようなになる.



問題 15.33

グラフが 2 点 $(2, -11)$, $(-12, 10)$ を通るものは (5) のみである.

実際, $3x + 2y = -16$ に $x = 2$, $y = -11$ を代入すると, 左辺は $3 \times 2 + 2 \times (-11) = -16$ となり, 右辺と等しくなる. 同様に, $x = -12$, $y = 10$ を代入しても, 左辺は右辺と等しくなることが確認できる. そして, このような関数はこれだけであることが確認できる.

問題 15.34

2 次関数 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ は

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x) + 6 = -\frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 4\} + 6 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 + 6 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 8$$

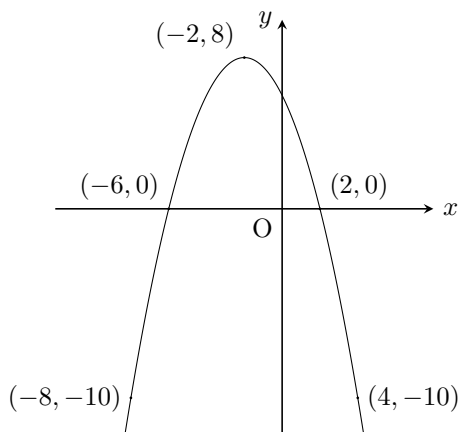
と変形できる. よって, そのグラフは頂点 $(-2, 8)$ の放物線になり, 2 次関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを x 軸方向

に（横に） -2 だけ、 y 軸方向に（縦に） 8 だけ平行移動させたものである。また、これは上に凸な関数である。

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \text{ とおくと、たとえば、}$$

$$f(-8) = -10, f(-6) = 0, f(-2) = 8, f(2) = 0, f(4) = -10$$

となるので、グラフは下記のようなになる。



問題 15.35

求める 2 次関数は、グラフの放物線の頂点が $(-3, 6)$ なので、 $y = a(x+3)^2 + 6$ とおくことができる。このグラフは点 $(-2, 4)$ を通るので、 $4 = a(-2+3)^2 + 6$ となり、 $a = -2$ であることがわかる。

よって、求める 2 次関数は $y = -2(x+3)^2 + 6$ ($y = -2x^2 - 12x - 12$) である。

問題 15.36

$$(1) 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$$

$$(2) 7^0 = 1$$

$$(3) 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{64}$$

$$(4) 10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{1}{10000000000}$$

問題 15.37

$$(1) 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = \sqrt{5 \times 5} = 5$$

$$(2) 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3$$

$$(3) 216^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6} = 6$$

$$(4) 100000000^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{100000000} = \sqrt[4]{100 \times 100 \times 100 \times 100} = 100$$

問題 15.38

$$(1) 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{4})^3 = (\sqrt{2 \times 2})^3 = 2^3 = 8$$

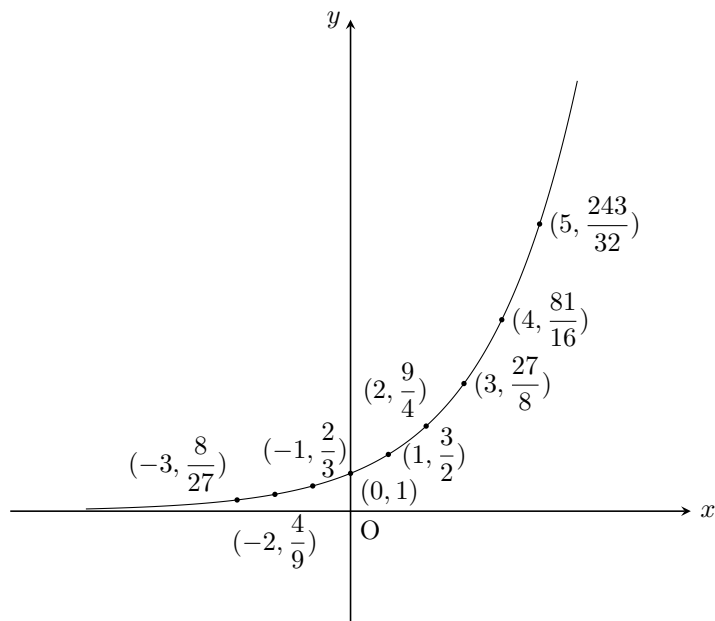
$$(2) 125^{-\frac{2}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = (\sqrt[3]{125})^{-2} = (\sqrt[3]{5 \times 5 \times 5})^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$(3) 1000000^{\frac{5}{6}} = \left(1000000^{\frac{1}{6}}\right)^5 = \left(\sqrt[6]{1000000}\right)^5 = \left(\sqrt[6]{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}\right)^5 = 10^5 = 100000$$

$$(4) \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = 2$$

$$(5) \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^{-1} = \left(\sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^1} = \frac{5}{2}$$

問題 15.39



問題 15.40

$$(1) \log_{10} 10000000 = \log_{10} 10^7 = 7$$

$$(2) \log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$$

$$(3) \log_{25} \frac{1}{25} = \log_{25} 25^{-1} = -1$$

$$(4) \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 (3^3)^{-1} = \log_3 3^{-3} = -3$$

$$(5) \log_{10} \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \log_2 4\sqrt{2} = \log_2 (2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$(7) \log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(8) \log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4$$

問題 15.41

$$(1) \log_2 20 + \log_2 6 - \log_2 30 = \log_2 (20 \times 6) - \log_2 30 = \log_2 \frac{20 \times 6}{30} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$(2) 2\log_3 2 - \log_3 108 = \log_3 \frac{2^2}{108} = \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3$$

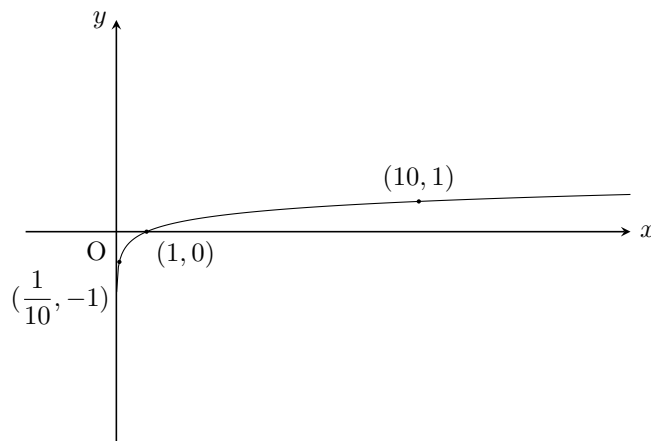
$$(3) \log_{10} 150 + 2\log_{10} 3 - \log_{10} 135 = \log_{10} (150 \times 3^2) - \log_{10} 135 = \log_{10} \frac{150 \times 3^2}{135} = \log_{10} 10 = 1$$

$$(4) \log_3 \frac{27}{\sqrt{3}} - \log_3 6\sqrt{2} + \log_3 2\sqrt{6} = \log_3 \frac{27}{\sqrt{3} \times 6\sqrt{2}} + \log_3 2\sqrt{6} = \log_3 \frac{27 \times 2\sqrt{6}}{\sqrt{3} \times 6\sqrt{2}} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

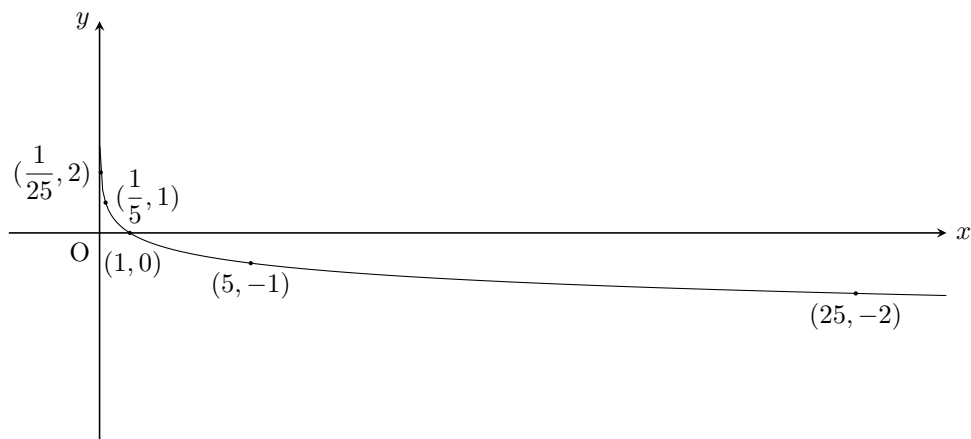
$$(5) (\log_3 \sqrt{5}) \cdot (\log_5 7) \cdot (\log_7 3) = (\log_3 5^{\frac{1}{2}}) \cdot \left(\frac{\log_3 7}{\log_3 5} \right) \cdot \left(\frac{\log_3 3}{\log_3 7} \right) = \left(\frac{1}{2} \log_3 5 \right) \cdot \left(\frac{\log_3 7}{\log_3 5} \right) \cdot \left(\frac{1}{\log_3 7} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (6) (\log_2 3 + \log_{16} 9)(\log_3 4 + \log_9 16) &= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 16} \right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 16}{\log_2 9} \right) \\ &= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^4} \right) \left(\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2} \right) = \left(\log_2 3 + \frac{2\log_2 3}{4} \right) \left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{4}{2\log_2 3} \right) \\ &= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{2} \right) \left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{2}{\log_2 3} \right) = \left(\frac{3}{2} \log_2 3 \right) \left(\frac{4}{\log_2 3} \right) = 6 \end{aligned}$$

問題 15.42



問題 15.43



問題 15.44

$f(x) = -11$ とおくと、求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-11 - (-11)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

と計算される.

問題 15.45

$f(x) = x^3$ とおくと, 求める微分係数は

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12 \end{aligned}$$

と計算される.

問題 15.46 $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと, 求める微分係数は

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と計算される.

問題 15.47

$f(x) = -x^3 - 5x^2 + 2x - 5$ とおくと, $x = 1$ における微分係数は

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^3 - 5(1+h)^2 + 2(1+h) - 5 - (-1 - 5 + 2 - 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1 + 3h + 3h^2 + h^3) - 5(1 + 2h + h^2) + 2 + 2h - 5 - (-9)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 - 3h - 3h^2 - h^3 - 5 - 10h - 5h^2 + 2 + 2h - 5 + 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3 - 8h^2 - 11h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-h^2 - 8h - 11) = -11 \end{aligned}$$

と計算される.

これより, 関数 $y = -x^3 - 5x^2 + 2x - 5$ の点 $(1, -9)$ における接線の傾きは -11 であることがわかる. よって, 求める接線の式は $y = -11(x - 1) - 9$, つまり, $y = -11x + 2$ である.

問題 15.48

$$(1) f'(x) = 10x^{(10-1)} = 10x^9$$

$$(2) f'(x) = -(-12)x^{(-12-1)} = 12x^{-13}$$

$$(3) f(x) = x^{\frac{1}{4}} \text{ より, } f'(x) = \frac{1}{4}x^{(\frac{1}{4}-1)} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \quad \left(= \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \right)$$

$$(4) f'(x) = (-5) \times 2x^{(2-1)} + 1 + 0 = -10x + 1$$

$$(5) f(x) = x^{-6} + \frac{1}{2}x^{-3} - 2x^{-1} + 6x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{5} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^{(-6-1)} + \frac{1}{2} \times (-3)x^{(-3-1)} - 2 \times (-1)x^{(-1-1)} + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x^{(-\frac{1}{2}-1)} + 0 \\ &= -6x^{-7} - \frac{3}{2}x^{-4} + 2x^{-2} - 3x^{-\frac{3}{2}} \quad \left(= -\frac{6}{x^7} - \frac{3}{2x^4} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

$$(6) f'(x) = 0 - \frac{5}{7}x^{(-\frac{5}{7}-1)} - \frac{5}{7} \times \left(-\frac{1}{5}\right)x^{(-\frac{1}{5}-1)} - 3 \times \frac{1}{3}x^{(\frac{1}{3}-1)} = -\frac{5}{7}x^{-\frac{12}{7}} + \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{5}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

問題 15.49

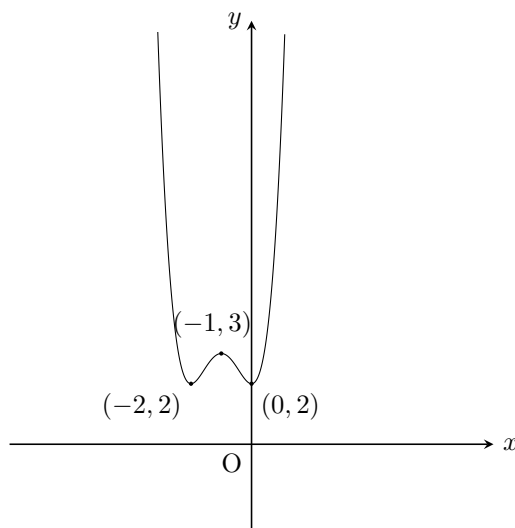
4 次関数 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2$ について、微分すると、 $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$ となる。これは、 $f'(x) = 4x(x^2 + 3x + 2) = 4x(x+1)(x+2)$ と変形できる。よって、 $x = -2$ または $x = -1$ または $x = 0$ のときに $f'(x)$ は 0 になる。

- $x < -2$ であるような x については $f'(x) < 0$ （接線の傾きが負）であり、 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2$ は減少する。
- $x = -2$ であるときは、 $f'(-2) = 0$ （接線の傾きが 0）である。また、 $f(-2) = (-2)^4 + 4 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 + 2 = 2$ である。
- $-2 < x < -1$ であるような x については $f'(x) > 0$ （接線の傾きが正）であり、 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2$ は増加する。
- $x = -1$ であるときは、 $f'(-1) = 0$ （接線の傾きが 0）である。また、 $f(-1) = (-1)^4 + 4 \times (-1)^3 + 4 \times (-1)^2 + 2 = 3$ である。
- $-1 < x < 0$ であるような x については $f'(x) < 0$ （接線の傾きが負）であり、 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2$ は減少する。
- $x = 0$ であるときは、 $f'(0) = 0$ （接線の傾きが 0）である。また、 $f(0) = 0^4 + 4 \times 0^3 + 4 \times 0^2 + 2 = 2$ である。
- $x > 0$ であるような x については $f'(x) > 0$ （接線の傾きが正）であり、 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2$ は増加する。

このことを増減表にまとめる。

x	...	-2	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	2	\nearrow	3	\searrow	2	\nearrow

以上より、グラフは下記のようなになる。



問題 15.50

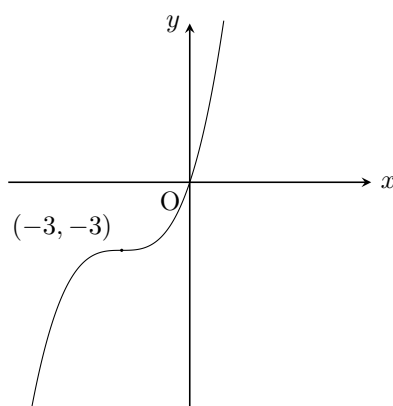
3 次関数 $f(x) = \frac{x^3}{9} + x^2 + 3x$ について、微分すると、 $f'(x) = \frac{x^2}{3} + 2x + 3$ となる。これは、 $f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 9) = \frac{1}{3}(x+3)^2$ と変形できる。

- $x = -3$ であるときは, $f'(-3) = 0$ (接線の傾きが 0) である. また, $f(-3) = \frac{(-3)^3}{9} + (-3)^2 + 3 \times (-3) = -3$ である.
- それ以外の x については $f'(x) > 0$ (接線の傾きが正) であり, $f(x) = \frac{x^3}{9} + x^2 + 3x$ は増加する.

これより増減表は次のようになる.

x	\cdots	-3	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	-3	\nearrow

以上より, グラフは下記のようなになる.



ここで, $f(x) = \frac{x^3}{9} + x^2 + 3x$ について, $f(x) = 0$ となるような x を求めると, $f(x) = \frac{x}{9}(x^2 + 9x + 27) = 0$ より, $x = 0$ となる ($x^2 + 9x + 27$ は変形すると $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$ となるので 0 にはならない). よって, グラフは点 $(0, 0)$ を通ることがわかる.

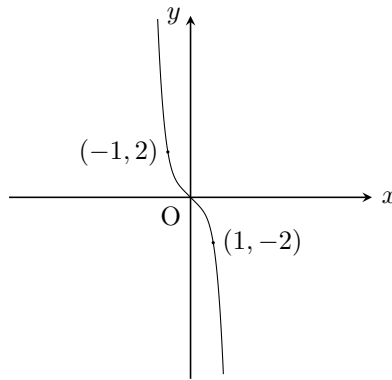
問題 15.51

5 次関数 $f(x) = -x^5 - x$ について, 微分すると, $f'(x) = -5x^4 - 1$ となる. よって, $f'(x)$ はつねに負であり, 0 にはならないことがわかる.

これより増減表は次のようになる.

x	\cdots
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	\searrow

グラフは下記のようなになる.



ここで、 $f(x) = -x^5 - x$ について、たとえば、 $f(-1) = -(-1)^5 - (-1) = 2$ 、また、 $f(0) = -0^5 - 0 = 0$ 、また、 $f(1) = -1^5 - 1 = -2$ となるので、グラフは点 $(-1, 2)$ 、および、点 $(0, 0)$ 、および、点 $(1, -2)$ を通る。

また、 $f'(x) = -5x^4 - 1$ が 0 となるような x は存在しないが、 $f'(x)$ がもっとも 0 に近くなるような x は 0 なので、グラフの傾きは $x = 0$ でもっともおだやかになることがわかる。

問題 15.52

$$(1) \int (x^2 + 5x) dx = \frac{1}{2+1}x^{(2+1)} + \frac{5}{1+1}x^{(1+1)} + C = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C$$

$$(2) \int \left(\frac{2}{x^3} - 4x^3 \right) dx = \int (2x^{-3} - 4x^3) dx = \frac{2}{-3+1}x^{(-3+1)} - \frac{4}{3+1}x^{(3+1)} + C \\ = -x^{-2} - x^4 + C \left(= -\frac{1}{x^2} - x^4 + C \right)$$

$$(3) \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3} \right) dx = \int \left(3x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{3}{-\frac{1}{2}+1}x^{(-\frac{1}{2}+1)} - \frac{x}{3} + C = \frac{3}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{3} + C \\ = 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{3} + C \left(= 6\sqrt{x} - \frac{x}{3} + C \right)$$

問題 15.53

たとえば、 $F(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{(\frac{1}{2}+1)} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$ は $f(t) = \sqrt{t}$ の原始関数のひとつなので、

$$\int_1^x f(t) dt = F(x) - F(1) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \left(= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3} \right)$$

となる。

問題 15.54

$$(1) \int_0^1 (1 - 4x^4) dx = \left[x - \frac{4}{4+1}x^{(4+1)} \right]_0^1 = \left[x - \frac{4}{5}x^5 \right]_0^1 = 1 - \frac{4}{5} \times 1^5 - \left(0 - \frac{4}{5} \times 0^5 \right) = \frac{1}{5}$$

$$(2) \int_{-10}^{10} \left(\frac{1}{x^7} + x \right) dx = \int_{-10}^{10} (x^{-7} + x) dx = \left[\frac{1}{-7+1}x^{(-7+1)} + \frac{1}{1+1}x^{(1+1)} \right]_{-10}^{10} = \left[-\frac{1}{6}x^{-6} + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-10}^{10} \\ = -\frac{1}{6} \times 10^{-6} + \frac{1}{2} \times 10^2 - \left(-\frac{1}{6} \times (-10)^{-6} + \frac{1}{2} \times (-10)^2 \right) \\ = -\frac{1}{6} \times 10^{-6} + \frac{1}{2} \times 10^2 - \left(-\frac{1}{6} \times (-1)^{-6} \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \times (-1)^2 \cdot 10^2 \right) \\ = -\frac{1}{6} \times 10^{-6} + \frac{1}{2} \times 10^2 - \left(-\frac{1}{6} \times 10^{-6} + \frac{1}{2} \times 10^2 \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
(3) \int_1^{1000} (x^{-\frac{1}{3}} + 10) dx &= \left[\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} x^{(-\frac{1}{3}+1)} + 10x \right]_1^{1000} = \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 10x \right]_1^{1000} \\
&= \frac{3}{2} \times 1000^{\frac{2}{3}} + 10 \times 1000 - \left(\frac{3}{2} \times 1^{\frac{2}{3}} + 10 \times 1 \right) = \frac{3}{2} \times 100 + 10000 - \left(\frac{3}{2} \times 1 + 10 \right) = \frac{20277}{2}
\end{aligned}$$