『金融実務講座 マルチンゲールアプローチ入門』正誤表

村上秀記 著 初版第１刷

2015 年 8 月 5 日発行

本表には以下の訂正と追加解説を含みます.

- 訂正(1)：p167 下から 12 行目の式を解くために必要な追加仮定
- 追加解説(1)：p198 上から 11 行目の式の非可算無限和に関して
- 追加解説(2)：「確率○の下で〜」と言う表現に関して

◆p16 (7)式

（誤） $C(0) = e^{-rT} E^{Q_B}\left[(S(T) - K, 0)^{+} \right]$

（正） $C(0) = e^{-rT} E^{Q_B}\left[(S(T) - K)^{+} \right]$

◆p32 下から 7 行目

（誤） $C(0) = e^{-rT} E^{Q_B}\left[(S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W^P(t)} - K, 0)^{+} \right]$

（正） $C(0) = e^{-rT} E^{Q_B}\left[(S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W^P(T)} - K)^{+} \right]$

◆p38 6 行目の終わりから 7 行目の始めにかけて

（誤）現在価値化た時に,

（正）現在価値化した時に,

◆p55 (35)式

（誤） $= S(t)\left((r + \sigma_2) dt + \sigma dW^{Q_S}(t)\right)$

（正） $= S(t)\left((r + \sigma^2) dt + \sigma dW^{Q_S}(t)\right)$

◆p56 図 1.15 の中の式(三箇所)

(誤) $$d\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right)=\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right)\sigma\left(\frac{-r+\mu+\sigma_2}{\sigma}dt+dW^P(t)\right)$$

(正) $$d\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right)=-\sigma\left(\frac{B(t)}{S(t)}\right)\left(-\frac{r-\mu+\sigma_2}{\sigma}dt+dW^P(t)\right)$$

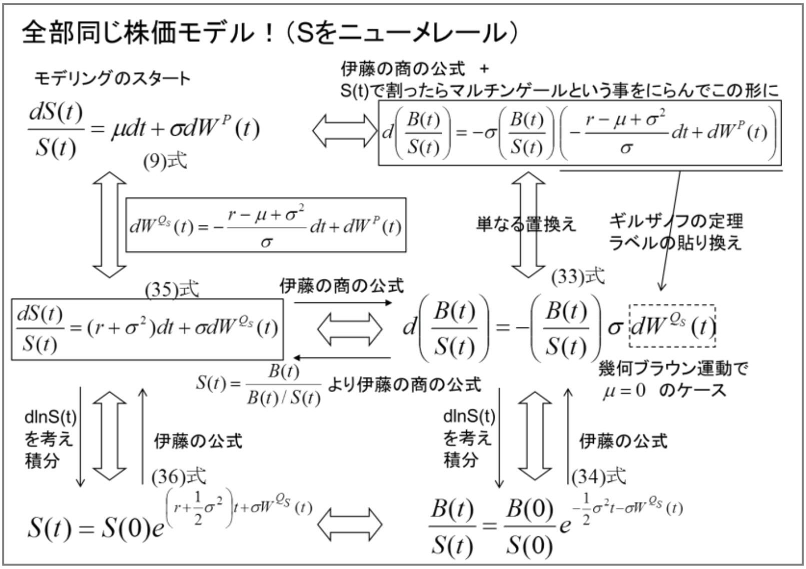
(誤) $$dW^{Q_S}(t)=\frac{-r+\mu+\sigma_2}{\sigma}dt+dW^P(t)$$

(正) $$dW^{Q_S}(t)=-\frac{r-\mu+\sigma_2}{\sigma}dt+dW^P(t)$$

(誤) $$\frac{dS(t)}{S(t)}=(r+\sigma_2)dt+\sigma dW^{Q_S}(t)$$

(正) $$\frac{dS(t)}{S(t)}=(r+\sigma^2)dt+\sigma dW^{Q_S}(t)$$

修正後の図 1.15(修正した式を実線で囲ってある)は次の通り.



◆p58p (39)式

（誤） $W^{Q_B}(t) := W^{Q_S}(t) + \sigma$

（正） $W^{Q_B}(t) := W^{Q_S}(t) + \sigma t$

◆p59 上から 9 行目の式

（誤） $$\frac{S(T)/S(T)}{B(T)/B(0)} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W^{QB}(T)}$$

（正） $$\frac{S(T)/S(0)}{B(T)/B(0)} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W^{QB}(T)}$$

◆p59 最終行の式

(誤) $$\frac{dQ_B}{dQ_S} = \frac{S(T)/S(T)}{B(T)/B(0)} = \sim$$

(正) $$\frac{dQ_B}{dQ_S} = \frac{S(T)/S(0)}{B(T)/B(0)} = \sim$$

◆p60 図 1.18 (二箇所)

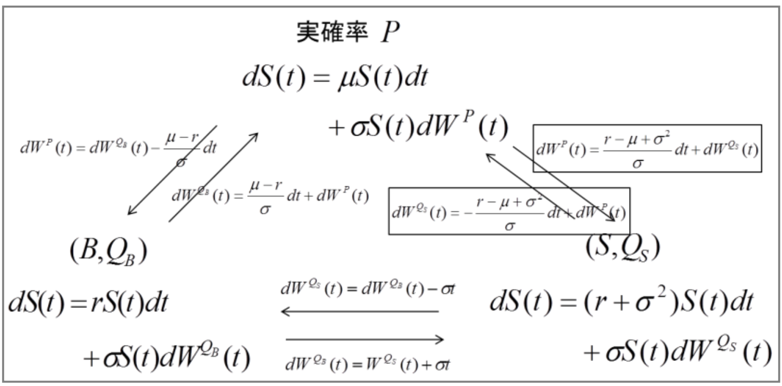
(誤) $$dW^{Q_S}(t) = \frac{\mu \quad r \mid \sigma^2}{\sigma} dt + dW^P(t)$$

(正) $$dW^{Q_S}(t) = -\frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} dt + dW^P(t)$$

(誤) $$dW^P(t) = dW^{Q_S}(t) - \frac{\mu - r + \sigma^2}{\sigma} dt$$

(正) $$dW^P(t) = \frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} dt + dW^{Q_S}(t)$$

修正後の図 1.18　（修正した式を実線で囲ってある）は次の通り.



◆p60 図 1.19(二箇所)

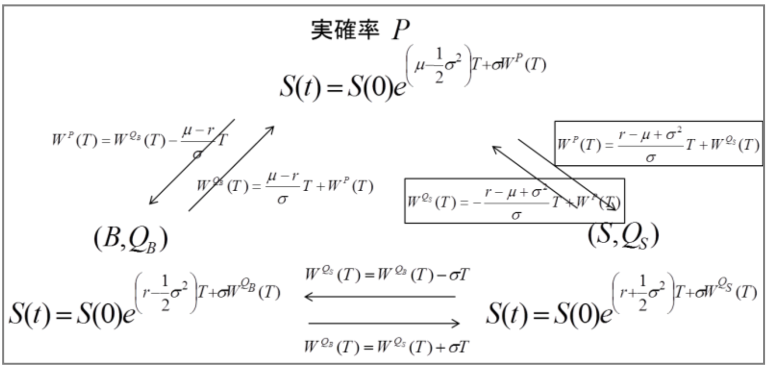
(誤) $W^{Q_S}(T)=\dfrac{\mu-r+\sigma^2}{\sigma}T+W^P(T)$

(正) $W^{Q_S}(T)=-\dfrac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma}T+W^P(T)$

(誤) $W^P(T)=W^{Q_S}(T)-\dfrac{\mu-r+\sigma^2}{\sigma}T$

(正) $W^P(T)=\dfrac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma}T+W^{Q_S}(T)$

修正後の図 1.19 (修正した式を実線で囲ってある)は次の通り.



◆p62 下から 7 行目

(誤) $W^{Q_B}(T)\overset{d}{=}-\sqrt{T\times X}$

(正) $W^{Q_B}(T)\overset{d}{=}-\sqrt{T}\times X$

◆p63 側注 112)

（誤）… ，デリバティブのプライシングに置いていは，…
（正）… ，デリバティブのプライシングに置いては，…

◆p64 上から 6 行目

（誤）$W^{Q_S}(T) \overset{d}{=} -\sqrt{T \times Y}$

（正）$W^{Q_S}(T) \overset{d}{=} -\sqrt{T} \times Y$

◆p69 上から 5 行目

（誤）$\beta = \dfrac{uC_1(\omega_U) - dC_1(\omega_D)}{(u-d)(1+r)}$

（正）$\beta = \dfrac{uC_1(\omega_D) - dC_1(\omega_U)}{(u-d)(1+r)}$

◆p80 7 行目

（誤）$dW(t) \times dW(t) = 0$ に対応

（正）$dW(t) \times dW(t) = dt$ に対応

◆p83 から p84 にかけて対数正規分布の密度関数を導出している所

複数個所で，以下のように 2 乗の記号が抜け落ちている

（誤）$f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)}{2\sigma^2}} dx$

（正）$f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}$

（誤） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}}$

（正） $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

◆p87 下から 2 行目

（誤） $\sim+\dfrac{\partial C}{\partial x}(t,S(t))\sigma S(t)dW(t)\Big)$

（正） $\sim+\dfrac{\partial C}{\partial x}(t,S(t))\sigma S(t)dW^P(t)\Big)$

◆p117 上から 13 行目

（誤） $S^{\$}(t)=S^{\$}(0)e^{\left(r^{\$}-\rho\sigma_{S^{\$}}\sigma_F-\frac{1}{2}\sigma_{S^{\$}}^2\right)}t+\sigma_{S^{\$}}W_{S^{\$}}^{Q_{B^{¥}}}(t)$

（正） $S^{\$}(t)=S^{\$}(0)e^{\left(r^{\$}-\rho\sigma_{S^{\$}}\sigma_F-\frac{1}{2}\sigma_{S^{\$}}^2\right)t+\sigma_{S^{\$}}W_{S^{\$}}^{Q_{B^{¥}}}(t)}$

◆p119 の下から 2 行目、p120 の下から 10 行目、p120 の側注 41）

（誤） $C^{Qnt}(0)$

（正） $C_{\$}^{Qnt}(0)$

◆p122 一番下の式と、下から 2 番目の式

（誤） $B^{¥(T)}$

（正） $B^{¥}(T)$

◆p128 上から 3 行目の式

A の範囲に $S(0)$ を含んでいるが，正しくは含まない

◆p133 一番上の式

（誤） $\theta = \dfrac{\left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma} \quad a = \dfrac{\ln(K/S(0))}{\sigma}$

（正） $\theta = \dfrac{\left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\ ,\ a = \dfrac{\ln(K/S(0))}{\sigma}$ （カンマがなかった）

◆p133 下から 2 行目の式

（誤） $B = E^{Q}\left[1_{\{S(T)>K\}}1_{\left\{\min\limits_{0\le t\le T} S(t)>L\right\}}\right]$

（正） $B = E^{Q_B}\left[1_{\{S(T)\ge K\}}1_{\left\{\min\limits_{0\le t\le T} S(t)>L\right\}}\right]$

◆p135 下から 11 行目

（誤） $1\{W^{Q_S^*}(T) > a\}$

（正） $1\{W^{Q_S^*}(T) \ge a\}$

◆p136 上から 5 行目の式

（誤） $W^{Q_S^*}(T) = \nu T + W^{Q_S}(T) \quad \nu = \dfrac{\left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$

（正） $W^{Q_S^*}(T) = \nu T + W^{Q_S}(T)\ ,\ \nu = \dfrac{\left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ （カンマがなかった）

◆p136 一番下の式

（誤） $= e^{2\nu b} E^{Q^*}\left[e^{-\frac{1}{2}\nu^2 T - \nu \tilde{W}^{Q^*}(T)} \times 1\{\tilde{W}^{Q_S^*}(T) \le 2b - a\} \right]$

（正） $= e^{2\nu b} E^{Q_S^*}\left[e^{-\frac{1}{2}\nu^2 T - \nu \tilde{W}_S^{Q^*}(T)} \times 1\{\tilde{W}^{Q_S^*}(T) \le 2b - a\} \right]$

◆p137 上から 7 行目の式

（誤） $= e^{2\nu b} E^{Q^{**}}\left[1\{\tilde{W}^{Q_S^{**}}(T) \le 2b - a + \nu T\} \right]$

（正） $= e^{2\nu b} E^{Q_S^{**}}\left[1\{\tilde{W}^{Q_S^{**}}(T) \le 2b - a + \nu T\} \right]$

◆p158 上から 5 行目

（誤）…，状態にかからず …

（正）…，状態にかかわらず …

◆p167 下から 14 行目の式

（誤） $(S(T_e) - K)^+$

（正） $(Fwd(T_e, T_e) - K)^+$

$S(T_e) = Fwd(T_e, T_e)$ ではあるが，この文脈ではフォワードを原資産としたオプションを考えているので，$Fwd(T_e, T_e)$ を用いた方が適切

◆p167 下から 12 行目の式 誤植と訂正(1)

（誤） $$C(0)=P(0,T_p)E^{Q_{T_p}}\left[\frac{S(T_e-K)^+}{P(T_p,T_p)}\right]=P(0,T_p)E^{Q_{T_p}}\left[S(T_e-K)^+\right]$$

（正） $$C(0)=P(0,T_p)E^{Q_{T_p}}\left[\frac{(Fwd(T_e,T_e)-K)^+}{P(T_p,T_p)}\right]=P(0,T_p)E^{Q_{T_p}}\left[(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

直前の誤植と同じ理由より $Fwd(T_e,T_e)$ を用いた方が文脈上適切.

◆訂正(1)p167 下から 12 行目の式を解くために必要な追加仮定

本文中では，直前の誤植で訂正した式を解く事によって，以下の式,

$$C(0)=P(0,T_p)\left[Fwd(0,T_e)N(\mathrm{d}1)-KN(\mathrm{d}2)\right]$$

$$\mathrm{d}1=\frac{\ln\left(\frac{Fwd(0,T_e)}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2T_e}{\sigma\sqrt{T_e}},\quad \mathrm{d}2=\frac{\ln\left(\frac{Fwd(0,T_e)}{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2T_e}{\sigma\sqrt{T_e}}$$

を得ることができるとしているが，そのためには以下で示すように(1) Q_{T_p} と Q_{T_e} が等しいか，又は(2) $Fwd(T_e,T_e)$ と $P(T_e,T_p)$ が互いに独立，という追加仮定が必要である（(1)は(2)の十分条件になっており，(1)が満たされていれば(2)は満たされている）．ただし，本文中で例として挙げられているキャップレットの場合は，フォワード Libor が（Q_{T_p} に対応する）$Q_{T+\Delta}$ の下でマルチンゲールになるという性質を持っているので，このような仮定を必要とすることなく，一般に成立する．

(1) Q_{T_p} と Q_{T_e} が等しい場合

$$C(0)=P(0,T_p)E^{Q_{T_p}}\left[(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

$$=P(0,T_p)E^{Q_{T_e}}\left[(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$ （仮定：Q_{T_p} と Q_{T_e} が等しい）

あとは一般論より，$\{Fwd(t,T_e)\}_{0\le t\le T_e}$ が Q_{T_e} の下でマルチンゲールである事を利用した本文中の仮定，

$$dFwd(t,T_e)=\sigma Fwd(t,T_e)dW^{Q_{T_e}}(t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad Fwd(T_e,T_e)=Fwd(0,T_e)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T_e+\sigma W^{Q_{T_e}}(T_e)}$$

を用いて期待値を計算すれば，目標の式が出て来る．

⑵ $Fwd(T_e,T_e)$ と $P(T_e,T_p)$ が互いに独立の場合

$$C(0)=P(0,T_p)E^{Q_{T_p}}\left[(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

期待値をとるメジャーを Q_{T_p} から Q_{T_e} へ変更して

$$=P(0,T_p)E^{Q_{T_e}}\left[\frac{P(T_e,T_p)/P(0,T_p)}{P(T_e,T_e)/P(0,T_e)}(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

$$=P(0,T_e)E^{Q_{T_e}}\left[P(T_e,T_p)(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

$Fwd(T_e,T_e)$ と $P(T_e,T_p)$ が互いに独立という仮定より

$$=P(0,T_e)E^{Q_{T_e}}\left[P(T_e,T_p)\right]E^{Q_{T_e}}\left[(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

ここで，ニューメレールペアとして $\left(P(\cdot,T_e),Q_{T_e}\right)$ を用いたマルチンゲールアプローチより，$\dfrac{P(0,T_p)}{P(0,T_e)}=E^{Q_{T_e}}\left[\dfrac{P(T_e,T_p)}{P(T_e,T_e)}\right]=E^{Q_{T_e}}\left[P(T_e,T_p)\right]$ が成立することから，これを直前の式に代入して，

$$C(0)=\cancel{P(0,T_e)}\frac{P(0,T_p)}{\cancel{P(0,T_e)}}E^{Q_{T_e}}\left[(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

$$= P(0,T_p)E^{Q_{T_e}}\left[(Fwd(T_e,T_e)-K)^+\right]$$

あとは(1)の場合と同様にして，仮定したフォワード価格のモデルを代入して解くと目標の式が出てくる．

最後に，(1)が(2)の十分条件になっている事を見よう． Q_{T_p} と Q_{T_e} が等しいという事は，ラドン・ニィコディム微分が 1 であるという事を意味するので，

$$\frac{dQ_{T_p}}{dQ_{T_e}} = \frac{P(T_e,T_p)/P(0,T_p)}{P(T_e,T_e)/P(0,T_e)} = 1 \quad \Rightarrow \quad P(T_e,T_p) = \frac{P(0,T_e)}{P(0,T_p)}$$

すなわち， $P(T_e,T_p)$ は期初の 2 つの債券価格で確定される．従って， Q_{T_p} と Q_{T_e} が等しい場合には， $P(T_e,T_p)$ は $Fwd(T_e,T_e)$ と独立になる．

（訂正(1)終り）

◆p169 下から 4 行目

（誤） T_k でわかる（ $\Im(T_k)$ − 可測）

（正） t_k でわかる（ $\Im(t_k)$ − 可測）

◆p170 上から 8 行目と 9 行目（2 ヶ所）

（誤） $\Im(T_k)$ − 可測

（正） $\Im(t_k)$ − 可測

◆p174 下から 2 行目の式

（誤） $Fut(T,T,T+3m) = Fwd(T,T,T+3m) = L(T,T,T+\Delta)$

（正） $Fut(T,T,T+3m) = Fwd(T,T,T+3m) = 100 - L(T,T,T+3m)\times 100$

◆p179 下から 12 行目と 15 行目の式

（誤） $\cdots = 100(1-(L(T,T,T+3m))$

（正） $\cdots = 100(1-L(T,T,T+3m))$

◆p195 下から 11 行目

（誤）舟木（2005）
（正）舟木（2004）

◆p197 上から 9 行目

（誤）開解集合全体
（正）開集合全体

◆p198 上から 11 行目の式 誤植と追加解説(1)

（誤） $1 = P([0,1]) \neq \sum_{x\in[0,1]} P(x) = 0$

（正） $1 = P([0,1]) \neq \sum_{x\in[0,1]} P(\{x\}) = 0$

◆追加解説(1) p198 上から 11 行目の式の非可算無限和に関して

一般に非可算無限個の<u>非負の</u>実数の集まり $\{r_\alpha(\geq 0)\}_{\alpha\in I}$（$I$ は非可算無限集合）に対して，その和 $\sum_{\alpha\in I} r_\alpha$ （非可算無限和）は，有限部分集合 $J(\subset I)$ 上での有限和 $\sum_{\alpha\in J} r_\alpha$ を用いて，その supremum（上限，又は最小上界）を取った，$\sum_{\alpha\in I} r_\alpha := \sup_{J\subset I}\left\{\sum_{\alpha\in J} r_\alpha\right\}$ として定義される.

ただし，和が“普通に”定義できるのはあくまで有限個までであり，<u>可算</u>無限

和はその極限として定義されるものの，非可算無限和は定義できないとする場合もある.

―追加解説(1) 終り―

◆p204 下から 2 行目

（誤）それとも裏が出た（$\omega \in \{HH, HT\}$）

（正）それとも裏が出た（$\omega \in \{TH, TT\}$）

◆p216 の最後から p217 の最初にかけて

（誤）条件付期待
（正）条件付期待値

◆p217 下から 2 行目

（誤）基本的な視座になる[73)]）.

（正）基本的な視座になる[73)].　　　（括弧閉じるが不要）

◆p219 下から 3 行目

（誤）$E[S_2 \mid \sigma(S_1)](\{TH, TT\}) = \dfrac{1}{0.5}(4 \times 0.5 + 1 \times 0.5) = 2.5$

（正）$E[S_2 \mid \sigma(S_1)](\{TH, TT\}) = \dfrac{1}{0.5}(4 \times 0.25 + 1 \times 0.25) = 2.5$

◆追加解説(2) 「確率○の下で~」と言う表現に関して

本文中では,「確率○の下で～」という表現が頻繁に現れるが，大まかに分類すると,

(i) 確率○の下でマルチンゲールになる
(ii) 確率○の下で（標準）ブラウン運動になる
(iii) 確率○の下で株価が $dS(t) \sim$ （←確率微分方程式）に従う

の 3 つのパターンに分けられる．マルチンゲールになるかどうか，（標準）ブラウン運動になるかどうかは，確率に依存するので，(i)と(ii)の表現は正しいが，(iii)の表現は好ましくなく，正確には間違った表現である．それは，確率微分方程式はある確率の下で成立し，他の確率の下では成立しないというような物ではないからである．実際，本文中では例えば，

$$dS(t)/S(t) = \mu dt + \sigma dW^{P}(t)$$

$$\left(= \mu dt + \sigma\left(-\frac{\mu - r}{\sigma} + dW^{Q_B}(t) \right) \right)$$

$$= rdt + dW^{Q_B}(t)$$

である事を見たが，2 つは全く同じ式であり，共に確率 P の下でも確率 Q_B の下でも成立している事がわかるだろう．そこで正しくは，“確率〇の下で株価が…”の代わりに，“確率〇の下でのブラウン運動を用いて株価が…”とすべきである．本文中でも，大半はそうしてあるが一部，例えば 1.6.1 のタイトルが“リスク中立確率の下での株価”となっていたり（言い訳をすると，これはタイトルという性質上，スペースの制約でこうせざるを得なかった），p120 の下から 8 行目では，“確率 $Q_{S^{\$}}$ の下での F の確率的な挙動を知る必要がある”となってしまっている．この表現は雰囲気的にはわかりやすく，さらに正しい表現が長くてまどろっこしい事も手伝って，ついつい使ってしまう表現である．

―追加解説(2)終り―

以上，誤植の多くは水野陽平氏，今井孝雄氏に指摘していただきました．また訂正と追加解説の内容に関して，長山いずみ氏に相談にのっていただきました．この場を借りて皆様に感謝します．