切断で定義される実数の分配法則

以下では，拙著『ε-δ 論法と数学の基礎』p. 235 では省略した，切断で定義された実数についての分配法則を証明します．

始めに，いくつかの定義を導入しつつ，拙著に述べられていたことを復習します．

定義 1. 実数全体の集合 $\mathbb{Q}$ の空でない部分集合 A, B に対して

$$A+B := \{\, x+y \mid x \in A,\, y \in B \,\}, \quad A \cdot B := \{\, xy \mid x \in A,\, y \in B \,\}$$

と置く（$A+B$, $A \cdot B$ とも $\mathbb{Q}$ の部分集合である）．さらに，

$$-A := \{\, -x \mid x \in A \,\}$$

と定める．

また，$q \in \mathbb{Q}$ に対して

$$A+q := \{\, x+q \mid x \in A \,\}, \quad q \cdot A := \{\, qx \mid x \in A \,\}$$

と置く．$q+A$ も同様に定義されるが，$A+q = q+A$ が成り立つことは明らかである．

有理数の切断 (A_-, A_+) の定義は拙著に述べたとおりとして，上組 A_+ に最小数が存在しない切断全体の集合が $\mathcal{R}$ と定められていました．そして，$q \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\sigma_q := \bigl(\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x \leq q \,\}, \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x > q \,\}\bigr)$$

は $\mathcal{R}$ の元となるので，q と σ_q を同一視して $\mathbb{Q} \subset \mathcal{R}$ と見なします．

■$\mathcal{R}$ における加法　切断 $\alpha := (A_-, A_+)$, $\beta := (B_-, B_+) \in \mathcal{R}$ に対してその和 $\alpha+\beta$ は $A_+ + B_+$ を上組（下組は $\mathbb{Q}$ に関するその補集合）とする切断として定義されました（$A_+ + B_+$ が最小元を持たないことおよび，$x \in A_+ + B_+$ かつ $x < y \in \mathbb{Q}$ ならば $y \in A_+ + B_+$ となることから確かに $\alpha+\beta \in \mathcal{R}$ となります）．$p, q \in \mathbb{Q}$ に対して $\sigma_p + \sigma_q = \sigma_{p+q}$ は容易に確かめられるので，$\mathcal{R}$ における加法は $\mathbb{Q}$ における加法の拡張になっていることが分かります．また，結合法則 $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ や交換法則 $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R})$ は簡単に示されます．そして，0（正確には σ_0）が加法の単位元であることも明らかです．

加法の逆元の記述が少しやっかいになりますが，$\alpha = (A_-, A_+)$ の下組に最大数が存在しない場合は，その逆元は $(-A_+, -A_-)$ となります．また，$q \in \mathbb{Q}$ に対して，σ_q の逆元は σ_{-q} となります（一般の形とは上組と下組の境界点の扱いだけが異なります）．

■$\mathcal{R}$ における順序　$\alpha := (A_-, A_+)$, $\beta := (B_-, B_+) \in \mathcal{R}$ に対して，$A_+ \supset B_+$ のとき $\alpha \leq \beta$（$\beta \geq \alpha$ とも書く）と定めると，これが $\mathcal{R}$ における順序関係となります．この関係が順序の公理を満たすことは容易に分かりますが，さらに全順序となることを示しておきます．

命題 1. 上に定めた $\mathcal{R}$ 上の順序関係は全順序関係となる．

Proof. $\alpha := (A_-, A_+)$, $\beta := (B_-, B_+) \in \mathcal{R}$ について $\alpha \leq \beta$ でないとすると，ある $b \in B_+$ で $b \notin A_+$ となるものが存在する．$b \notin A_+$ ということは $b \in A_-$ を意味するので，任意の $a \in A_+$ は $b < a$ を満たし，これから $A_+ \subset B_+$ すなわち $\beta \leq \alpha$ が示される．　□

また，実数の公理系にある「加法に関する順序の平行移動不変性」，つまり任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ について，「$\alpha \leq \beta$ ならば $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$」という主張も容易に確かめられます．

■$\mathcal{R}$ における積　拙著の本文で述べたとおり，$\alpha := (A_-, A_+)$, $\beta := (B_-, B_+)$ の積は符号別に定義する必要があり，$\alpha, \beta \geq 0$ の場合が基本で，そのとき積 $\alpha\beta$ は $A_+ \cdot B_+$ を上組とする切断と定義します．これが確かに $\mathcal{R}$ の元を定めていることは，$A_+ \cdot B_+$ に最小元がないことと，$x \in A_+ \cdot B_+$ かつ $x < y \in \mathbb{Q}$ ならば $y \in A_+ \cdot B_+$ が成り立つことを示せばよいのですが，それは容易です．このため，“$\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha\beta \geq 0$” という実数の公理の一つは当然成り立ちます．一般の積は，加法の逆元を使って，例えば $\alpha \geq 0, \beta < 0$ の場合は，$\alpha\beta := -(\alpha(-\beta))$ と定めます．他の場合も同様にして非負の場合に帰着して定義します．この積は $\mathbb{Q} \subset \mathcal{R}$ と見た場合，$\mathbb{Q}$ における通常の積の拡張になっていることが容易に確かめられます．また，有理数 $q > 0$ に対する $\sigma_q \in \mathcal{R}$ と一般の $\alpha = (A_-, A_+) \in \mathcal{R}$ の積について，$\sigma_q\alpha$ の上組が $q \cdot A_+$ であることも困難なく示せます．このように定義は面倒になりますが，乗法の交換法則や乗法の結合法則はすべてが非負の元の場合に帰着させて簡単に証明できます．

■分配法則の証明　加法と乗法のからんだ $\mathcal{R}$ における分配法則の証明は，いまのところかなりやっかいです．もしかしたらもっと容易な証明があるかもしれませんが，筆者が現在得ているものを以下に述べます．手間が掛かっていますが，有理数内において ε-δ 論法的な議論が役に立っています．

最初に容易に証明できる場合を確認のため述べておきます．

補題 1. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ がすべて非負なとき，$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ が成り立つ．

Proof. α_+ のように下付きの $+$ 記号によって切断の上組を表すことにする．このとき補題の主張は，非負の α, β, γ に対して

$$\bigl(\alpha(\beta + \gamma)\bigr)_+ = (\alpha\beta)_+ + (\alpha\gamma)_+$$

と同値であるが，

$$\begin{aligned}\bigl(\alpha(\beta + \gamma)\bigr)_+ &= \alpha_+ \cdot (\beta + \gamma)_+ = \alpha_+ \cdot (\beta_+ + \gamma_+) \\ (\alpha\beta)_+ + (\alpha\gamma)_+ &= \alpha_+ \cdot \beta_+ + \alpha_+ \cdot \gamma_+\end{aligned}$$

であるから，

$$\alpha_+ \cdot (\beta_+ + \gamma_+) = \alpha_+ \cdot \beta_+ + \alpha_+ \cdot \gamma_+$$

を証明すればよい．しかし

$$\alpha_+ \cdot (\beta_+ + \gamma_+) \subset \alpha_+ \cdot \beta_+ + \alpha_+ \cdot \gamma_+$$

は明らかである．また，$\alpha_+ \cdot \beta_+ + \alpha_+ \cdot \gamma_+$ の一般の元は，$x \in \beta_+, y \in \gamma_+$ と $z_1, z_2 \in \alpha_+$ によって $z_1x + z_2y$ という形をしている．しかし $z_0 = \min\{\, z_1, z_2 \,\}$ とすると $z_0 \in \alpha_+$ なので

$$z_1x + z_2y \geq z_0(x + y) \in \alpha_+ \cdot (\beta_+ + \gamma_+) \tag{1}$$

となり，$\alpha_+ \cdot (\beta_+ + \gamma_+)$ は切断 $\alpha(\beta + \gamma)$ の上組だったから (1) より $z_1x + z_2y \in \alpha_+ \cdot (\beta_+ + \gamma_+)$ が示され，

$$\alpha_+ \cdot (\beta_+ + \gamma_+) \supset \alpha_+ \cdot \beta_+ + \alpha_+ \cdot \gamma_+$$

も得られて証明が終わる．□

一般の場合の分配法則を補題 1 に帰着させようとしても，符号によって場合を分ける方法はうまく行きませんので，平行移動を用います．つまり，β の代わりに $\beta + n \geq 1$ となるような十分大きい自然数 n を考えてみるのです（γ も同様）．このときに $\alpha(\beta + n) = \alpha\beta + n\alpha$（下の補題 4）が示されればうまく行くのですが，その証明には準備として二つの補題が必要です．

補題 2. $(A_-, A_+) \in \mathcal{R}$ とすると，次の主張が成り立つ：

(1) 任意の $x \in A_+$ と任意の正の有理数 ε に対して，$p' \in A_-$, $p \in A_+$ で，$p < x$ かつ $p - p' < \varepsilon$ を満たすものが存在する．

(2) $y \in A_-$ が A_- の最大元でないならば，任意の正の有理数 ε に対して，$q' \in A_-$, $q \in A_+$ で $y < q'$ かつ $q - q' < \varepsilon$ を満たすものが存在する．

Proof. **(1) の証明：**A_+ には最小元は存在しないので，$\tilde{x} < x$ を満たす $\tilde{x} \in A_+$ が取れる．$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\tilde{x} - k\varepsilon/3$ を考えると，ある k で $p := \tilde{x} - k\varepsilon/3 \in A_+$ かつ $p' := \tilde{x} - (k+1)\varepsilon/3 \in A_-$ が成り立つことが分かり，この p, p' は求める条件を満たしている．

(2) の証明：y は A_- の最大元ではないならば $\tilde{y} \in A_-$ で $y < \tilde{y}$ を満たすものが取れる．これに対して $\tilde{y} + k\varepsilon/3$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を考えれば (1) と同様にして示される． □

Remark. 上の補題は，A_- と A_+ の境界の数という実数をまだ使えないため，有理数の範囲だけで議論を進められるようにするのが目的です．

補題 3. $\alpha := (A_-, A_+)$, $\beta := (B_-, B_+) \in \mathcal{R}$ が $\alpha \geq 0$ かつ $\beta < 0$ を満たすとし，次のように集合 S を定義する．

$$S := \{\, x \in \mathbb{Q} \mid \forall y \in B_- \ \forall z \in A_+ \ x > yz \,\} \tag{2}$$

このとき積 $\alpha\beta$ を定める切断の上組 $(\alpha\beta)_+$ は，

$$(\alpha\beta)_+ = \begin{cases} S & S \text{ に最小元が存在しないとき} \\ S \setminus \{q\} & S \text{ に最小元 } q \in \mathbb{Q} \text{ が存在するとき} \end{cases} \tag{3}$$

となる．

Proof. $\alpha\beta = -(\alpha(-\beta))$ であり，B_- に最大元がある場合もない場合もともに，切断 $\alpha(-\beta)$ の上組は $A_+ \cdot (-B_-) = -(A_+ \cdot B_-)$ であることが分かる．よって，$\alpha\beta = -(\alpha(-\beta))$ の下組は，$\alpha\beta$ がある有理数 q に対応する切断 σ_q に一致する場合は $(A_+ \cdot B_-) \cup \{q\} =$ であり，このときは $A_+ \cdot B_- = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x < q \,\}$ となる．また，どのような有理数 q に対しても $\alpha\beta = \sigma_q$ とならない場合は $A_+ \cdot B_-$ となる．前者の場合には (2) の S は $\{\, x \in \mathbb{Q} \mid x \geq q \,\}$ となり，この集合の最小元 q を除いた $S \setminus \{q\}$ が確かに $\alpha\beta$ の上組となっている．後者の場合には $\alpha\beta$ の上組は下組 $A_+ \cdot B_-$ の $\mathbb{Q}$ における上界全体であり，それはまさしく (2) の S に等しい． □

補題 4. $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ は $\alpha > 0$, $\beta < 0$ を満たしているとする．このとき $\beta + \sigma_q \geq 1$ となるような有理数 q（必然的に $q > 1$）に対して，$\alpha(\beta + \sigma_q) = \alpha\beta + \alpha\sigma_q$ すなわち

$$\big(\alpha(\beta + \sigma_q)\big)_+ = (\alpha\beta)_+ + q \cdot \alpha_+ \tag{4}$$

が成り立つ．ただし下付添字の $+$ はそれぞれの切断の上組を表すものとする．

Proof. **Part 1.** $\big(\alpha(\beta + \sigma_q)\big)_+ \supset (\alpha\beta)_+ + q \cdot \alpha_+$ の証明：はじめに

$$(\alpha(\beta + \sigma_q))_+ = \alpha_+ \cdot (\beta + \sigma_q)_+ = \alpha_+ \cdot (\beta_+ + q) \tag{5}$$

に注意しておこう．$x \in (\alpha\beta)_+$, $z \in \alpha_+$ とすると，$(\alpha\beta)_+$ には最小元がないので，$\tilde{x} < x$ を満たす $\tilde{x} \in (\alpha\beta)_+$ が存在する．これに対して補題 2 の (2) より $y' \in \beta_-$, $y \in \beta_+$ で $y - y' < z^{-1}(x - \tilde{x})$ を満たすものが取れ

る（ここで β_- は切断 β の下組を表す）．これから

$$\begin{aligned} x + qz &= x - \tilde{x} + \tilde{x} + qz \\ &> x - \tilde{x} + zy' + qz \quad \text{（補題 3 より）} \\ &= x - \tilde{x} - z(y - y') + zy + qz \\ &> z(y + q) \in (\alpha(\beta + \sigma_q))_+ \end{aligned}$$

となり，$x + qz \in (\alpha(\beta + \sigma_q))_+$ が示され証明が終わる．

Part 2. $\big(\alpha(\beta + \sigma_q)\big)_+ \subset (\alpha\beta)_+ + q \cdot \alpha_+$ の証明：(5) より任意の $y_0 \in \beta_+$, $z_0 \in \alpha_+$ に対して $z_0(y_0 + q) \in (\alpha\beta)_+ + q \cdot \alpha_+$ を示せばよい．$y_0 \geq 0$ の場合と $y_0 < 0$ の場合に分けて考える．

Case 1. $y_0 \geq 0$ の場合：$z_0(y_0 + q) = z_0y_0 + qz_0$ において $qz_0 \in q \cdot \alpha_+$ である．また，任意の $y \in \beta_-$ と $z \in \alpha_+$ に対して $z_0y_0 \geq 0 > yz$ であるが，$\alpha > 0$ かつ $\beta < 0$ なのでさらに強く，y, z に無関係なある有理数 $r < 0$ に対して $yz < r < z_0y_0$ となることが言える．よって補題 3 より $z_0y_0 \in (\alpha\beta)_+$ となりこの場合の主張は証明された（z_0y_0 が補題 3 中の S の最小元ではあり得ないことも示されていることに注意）．

Case 2：$y_0 < 0$ の場合：z_0 は α_+ の中で最小ではないので，ある $\tilde{z} \in \alpha_+$ で $\tilde{z} < z_0$ となるものが存在する．これから有理数 $\delta > 0$ を $\delta < (z_0 - \tilde{z})/(2|y_0|)$ を満たすように取ると，補題 2 により，ある $z_1 \in \alpha_+$, $z_2 \in \alpha_-$ で $z_1 < \tilde{z}$ かつ $z_1 - z_2 < \delta$ となるものが存在する．そうすると

$$\text{任意の } y \in \beta_- \text{ と } z \in \alpha_+ \text{ に対して } yz < y_0z < y_0z_2 \tag{6}$$

が成り立つ．そこで

$$z_0(y_0 + q) = \big(z_0y_0 + (z_0 - z_1)q\big) + z_1q$$

と変形すると $z_1q \in q \cdot \alpha_+$ だから $z_0y_0 + (z_0 - z_1)q \in (\alpha\beta)_+$ を示せば補題 Part 2 の主張は証明される．そして，$y \in \beta_-$, $z \in \alpha_+$ とすると，(6) により

$$\begin{aligned} z_0y_0 + (z_0 - z_1)q - yz &> z_0y_0 + (z_0 - z_1)q - y_0z_2 \\ &= (z_0 - z_1)y_0 + z_1y_0 + (z_0 - z_1)q - y_0z_2 \\ &= (z_0 - z_1)(y_0 + q) + y_0(z_1 - z_2) \\ &> z_0 - \tilde{z} + y_0(z_1 - z_2) \quad (\because y_0 + q \geq 1 \text{ かつ } z_1 < \tilde{z}) \\ &> \frac{1}{2}(z_0 - \tilde{z}) \quad (\because |y_0(z_1 - z_2)| < |y_0|\delta < (z_0 - \tilde{z})/2) \end{aligned}$$

となり，補題 3 により $z_0y_0 + (z_0 - z_1)q \in (\alpha\beta)_+$ が分かる（$z_0y_0 + (z_0 - z_1)q$ は補題 3 中の S の最小元ではあり得ないことも示されている）． □

以上の補題から分配法則が容易に示されます．

定理 1 ($\mathcal{R}$ の分配法則)**.** 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ に対して

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

が成り立つ．

Proof. $\mathcal{R}$ における積の定義から $\alpha \geq 0$ の場合に証明できれば十分であるが，$\alpha = 0$ の場合には両辺ともに 0 となって成り立つので，以下では $\alpha > 0$ とする．なお，0 と書いているのは $\mathbb{Q} \subset \mathcal{R}$ と見なしているからであって，正確には有理数の 0 に対応する切断 σ_0 のことである．以下においても，有理数 q と切断 σ_q を同一視した表現を用いる．

さて，β, γ のそれぞれに対して十分大きい自然数 m, n を取れば，$\beta + m \geq 1$ かつ $\gamma + n \geq 1$ とできる．このとき補題 1 より

$$\alpha\bigl((\beta + m) + (\gamma + n)\bigr) = \alpha(\beta + m) + \alpha(\gamma + n) \tag{7}$$

が成り立つ．そして $\beta + \gamma + m + n > 1$ だから，補題 4 から

$$\alpha\bigl((\beta + \gamma) + (m + n)\bigr) = \alpha(\beta + \gamma) + (m + n)\alpha \tag{8}$$

が成り立つ．

さらに補題 4 から

$$\alpha(\beta + m) = \alpha\beta + m\alpha$$
$$\alpha(\gamma + n) = \alpha\gamma + n\alpha$$

が成り立つので，これらと (7), (8) から

$$\alpha(\beta + \gamma) + (m + n)\alpha = \alpha\beta + m\alpha + \alpha\gamma + n\alpha$$

が得られ，両辺から $(m + n)\alpha$ を引いて（$\mathcal{R}$ が加法に関して可換群をなすことが分かっているので許される），分配法則が示される． $\square$