p. 27 への補遺

『ε-δ 論法と数学の基礎』p. 27 ではエウドクソスの比例論と実数の定義の親近性を扱っていますが，次の主張は本題から離れるため，確認は読者に委ねられていました．しかしその証明は矛盾を用いるやや複雑なものですので，念のためここに示しておきます．ただし，主張自体が「同種の量」という『原論』レベルの概念を含んでいるので，証明も量に関する『原論』レベルの了解に基づくものとなりますが，「比の値」を経由せずに済むところがだいじなのです．

命題 1. a と b，c と d はそれぞれ同種の量とし，これらについて，m, n を自然数を表す変数として次の等式が成立しているものとする：

$$\{\,(m,n) \mid ma < nb\,\} = \{\,(m,n) \mid mc < nd\,\} \tag{1}$$

このとき，任意の自然数 m, n に対して $ma = nb$ と $mc = nd$ は同値となる．

Proof. (1) が成り立っていれば，その両辺は自然数の順序対からなる同じ集合を定めるが，その集合を以下では A と呼ぶ．

(1) が成り立っていて，$ma = nb$ であるとする．このとき $mc = nd$ であることが示されれば，対称性により $ma = nb$ と $mc = nd$ が同値であることが分かる．さて，$ma = nb$ とすると $(m,n) \notin A$ だから $mc \geq nd$ が成り立つ．よって，$mc > nd$ が成り立たないことを示せば $mc = nd$ が分かり証明は終わる．そのために，条件 (1) の下で

$$ma = nb \text{ かつ } mc > nd \tag{2}$$

とすると矛盾が起きることを示そう．

$mc > nd$ とすると，エウドクソス・アルキメデスの原理により，ある自然数 k で

$$d < k(mc - nd)$$

となるが，これより $(kn+1)d < kmc$ となる．これは $(km, kn+1) \notin A$ を意味するので (1) より $kma \geq (kn+1)b$ が導かれる．一方 (2) の仮定から $kma = knb$ なので

$$kma = knb < (kn+1)b \leq kma$$

となり矛盾が得られる．　□

Remark. 上の証明では分かりやすくするために集合を用いているが，「$ma < nb$ と $mc < nd$ が同値」ということを表現しているだけなので，必須のものではない．また，量の差 $mc - nd$ を用いているが，『原論』のレベルでこれが許されるかどうかは明白ではない．しかし $nd < mc$ であれば，十分小さい（0 でない）量 ε で $nd + \varepsilon < mc$ を満たすものが存在する，ということは『原論』（加法は許されている）のレベルでも認められると思われる．このような ε を使えば命題は同様に証明出来る．実際，エウドクソス・アルキメデスの原理によりある自然数 k で $d < k\varepsilon$ となるので，このことと $knd + k\varepsilon < kmc$ からやはり $(kn+1)d < kmc$ が得られ，あとは上の証明と同様にして矛盾が得られる．